NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG III. VECTO-QUAN HỆ VUÔNG GÓC

TẬP 1. VÉC TƠ

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489 hoặc liên hệ

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Website: http://tailieutoanhoc.vn/

Email: baovuong7279@gmail.com

[Pick the date]

MỤC LỤC

CHƯƠNG III. VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

TẬP 1. VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

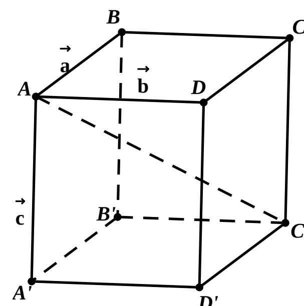
A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Các khái niện và các phép toán của vec tơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng.Ngoài ra ta cần nhớ thêm:

1. Qui tắc hình hộp : Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.



2. Qui tắc trọng tâm tứ diện.

G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau xảy ra:

- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG},\forall M$

3. Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.

Điều kiện cần và đủ để ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng là có các số m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

Cho hai vec tơ không cùng phương khi đó điều kiện cần và đủ để ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng là có các số m,n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Nếu ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vec tơ $\vec{d}$ đều có thể phân tích một cách duy nhất dưới dạng $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VEC TƠ.

Phương pháp:

Sử dụng qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ giác, qui tắc hình bình hành, qui tắc hình hộp…để biến đổi vế này thành vế kia.

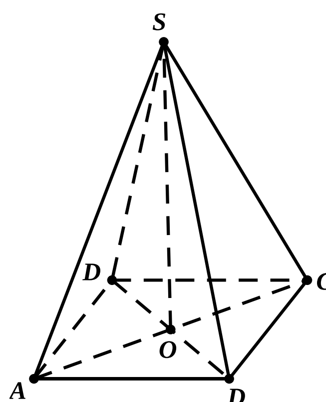
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật . Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$

Ta có $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|$.



$\overrightarrow{SA}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}$ (1)

$\overrightarrow{SC}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$

$=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2$ (vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$).

Tương tự $\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OD}^2$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$.

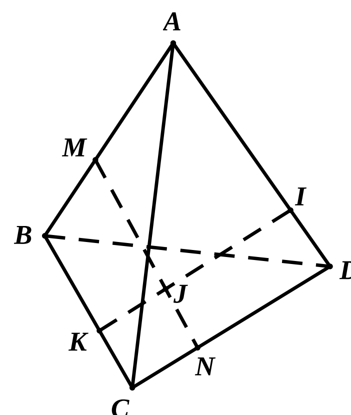
Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}=-2\overrightarrow{NC}$; các điểm I,J,K lần lượt thuộc AD,MN,BC sao cho $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{ID},\overrightarrow{JM}=k\overrightarrow{JN},\overrightarrow{KB}=k\overrightarrow{KC}$.

Chứng minh với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$ nên với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=-2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$.



Tương tự ta có :

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OC}}{3}$, $\overrightarrow{OI}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OD}}{1-k}$, $\overrightarrow{OK}=\dfrac{\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OC}}{1-k}$, $\overrightarrow{OJ}=\dfrac{\overrightarrow{OM}-k\overrightarrow{ON}}{1-k}$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{OJ}=\dfrac{1}{1-k}.\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OD}-2k\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{1-k}.\frac{1}{3}[(1-k)\overrightarrow{OI}+2(1-k)\overrightarrow{OK}]=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OK})$

Vậy $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH BA VEC TƠ ĐỒNG PHẲNG VÀ BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG.

Phương pháp:

Để chứng minh ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

- Chứng minh giá của ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng.
- Phân tích $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ trong đó $\vec{a},\vec{b}$ là hai vec tơ không cùng phương.

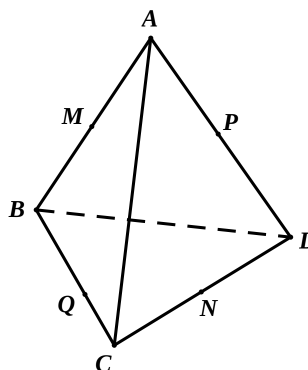
Để chứng minh bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng ta có thể chứng minh ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Ngoài ra có thể sử dụng kết quả quen thuộc sau:

Điều kiện cần và đủ để điểm $D\in(ABC)$ là với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x+y+z=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Gọi P,Q lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD},\ \overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}(k\neq 1)$. Chứng minh M,N,P,Q đồng phẳng.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD}\Rightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MP}=k(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MP})$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}}{1-k}$.

Tương tự $\overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}\Rightarrow\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Suy ra $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

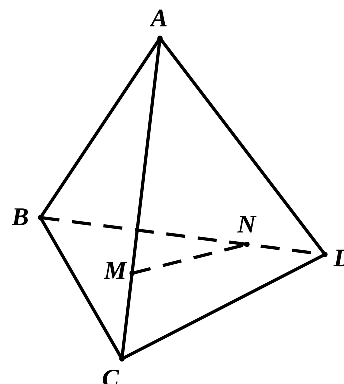
$=\frac{k}{k-1}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$ (Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$)

Mặt khác N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$ suy ra ba vec tơ $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng, hay bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M,N xác định bởi $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MC},\overrightarrow{NB}=y\overrightarrow{ND}$ $(x,y\neq 1)$. Tìm điều kiện giữa x và y để ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\overrightarrow{DB}=\vec{b},\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.



$\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DM}=x\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DM}\right)\Rightarrow\overrightarrow{DM}=\dfrac{\overrightarrow{DA}-x\overrightarrow{DC}}{1-x}=\dfrac{\vec{a}-x\vec{c}}{1-x}\quad(1)$.

Lại có $\overrightarrow{NB}=y\overrightarrow{ND}\Rightarrow\overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{1-y}\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{1-y}\vec{b}\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\dfrac{-1}{1-x}\vec{a}+\dfrac{1}{1-y}\vec{b}+\dfrac{x}{1-x}\vec{c}$.

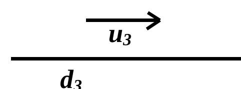
Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{CD}=-\vec{c}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vec tơ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CD}$, tức là $\dfrac{-1}{1-x}\vec{a}+\dfrac{1}{1-y}\vec{b}+\dfrac{x}{1-x}\vec{c}=m\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-n\vec{c}$

$$\Leftrightarrow\left(m-\frac{1}{1-x}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{1-y}-m\right)\vec{b}+\left(n+\frac{x}{1-x}\right)\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{1-x}\\ m=\dfrac{1}{1-y}\\ n=-\dfrac{x}{1-x}\end{cases}\Rightarrow x=y$$

Vậy ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x=y$.

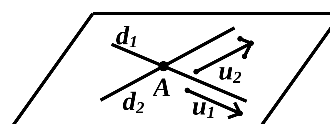
Lưu ý : Ta có thể sử dụng điều kiện đồng phẳng của ba vec tơ để xét vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng:

Cho ba đường thẳng d_1,d_2,d_3 lần lượt chứa ba vec tơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ trong đó d_1,d_2 cắt nhau và $d_3\not\subset mp\left(d_1,d_2\right)$.



Khi đó :

- $d_3 // \left(d_1,d_2\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ đồng phẳng.
- $d_3\cap mp\left(d_1,d_2\right)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ không đồng phẳng



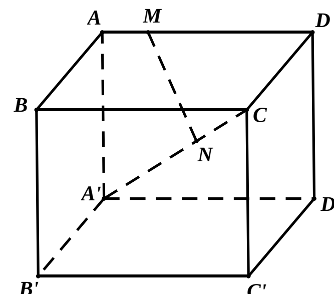
Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M,N là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NA'}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh $MN//(BC'D)$.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BB'}=\vec{b},\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vec tơ không đồng phẳng

và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{BC'}=\vec{b}+\vec{c},\overrightarrow{BA'}=\vec{a}+\vec{b}$.



Ta có

$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BM}\right)\Rightarrow\frac{5}{4}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{4\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{5}=\frac{4\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{c}\right)}{5}=\frac{5\vec{a}+\vec{c}}{5}$.

Tương tự $\overrightarrow{BN}=\frac{3\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}}{5}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{5}=-\frac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+\frac{3}{5}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$

Suy ra $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BC'}$ đồng phẳng mà $N\notin(BC'D)\Rightarrow MN//(BC'D)$.

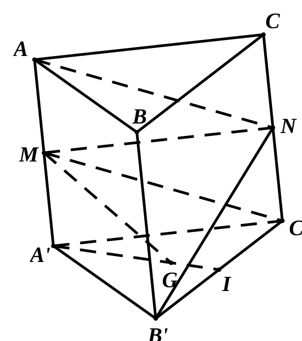
Nhận xét: Có thể sử dụng phương pháp trên để chứng minh hai mặt phẳng song song.

Ví dụ 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Chứng minh $(MGC')//(AB'N)$.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$



Vì M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\vec{a}$,

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

Vì G là trọng tamm của tam giác $A'B'C'$ nên

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$ suy ra $\overrightarrow{MG},\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AN}$ đồng phẳng, Mặt khác $G\notin(AB'N)\Rightarrow MG//(AB'N)$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{MC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{k}=\overrightarrow{AN}$ $\Rightarrow MC'//(AB'N)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} MG//(AB'N) \\ MC'(AB'N) \end{cases} \Rightarrow (MGC')//(AB'N)$.

Bài toán 03: TÍNH ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG.

Phương pháp:

Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vec tơ ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

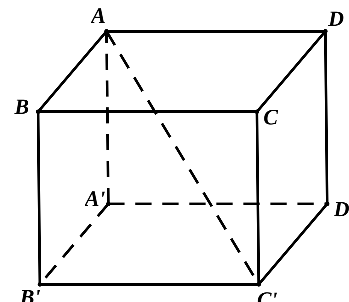
- Chọn ba vec tơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
- Phân tích $\overrightarrow{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$
- Khi đó $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2}$

$= \sqrt{m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + p^2|\vec{c}|^2 + 2mn\cos(\vec{a},\vec{b}) + 2np\cos(\vec{b},\vec{c}) + 2mp\cos(\vec{c},\vec{a})}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và các góc $BAA' = BAD = DAA' = 60^0$. Tính độ dài đường chéo AC'.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ thì

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, (\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a}) = 60^0$.

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}$

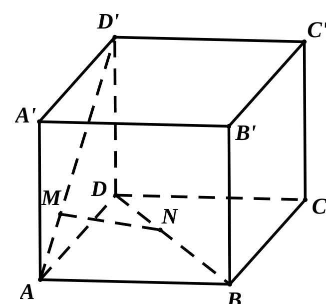
$= 3a^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^0 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^0 + 2|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^0 = 6a^2 \Rightarrow AC' = a\sqrt{6}$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông canh a. Lấy M thuộc đoạn $A'D$, N thuộc đoạn BD với $AM = DN = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$. Tính MN theo a và x.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, (\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a}) = 90^0$



$\overrightarrow{DN} = \frac{DN}{DB}.\overrightarrow{DB} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AD'}.\overrightarrow{AD'} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{b} + \frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

$= \frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b} - \frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}$.

$MN^2 = \left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b} - \frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}\right)^2 = \frac{x^2}{2a^2}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)^2\vec{b}^2 + \frac{x^2}{2a^2}\vec{c}^2$

$= x^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}x}{a} + \frac{x^2}{2a^2}\right)a^2 = \frac{3x^2}{2} - \sqrt{2}ax + a^2$

$MN = \sqrt{\frac{3x^2}{2} - \sqrt{2}ax + a^2}$.

Bài toán 04: SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BỐN ĐIỂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN.

Phương pháp:

Sử dụng các kết quả

- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = m\overrightarrow{DB} + n\overrightarrow{DC}$
- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x + y + z = 1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành . Gọi B',D' lần lượt là trungđiểm của các cạnh SB,SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính $\frac{SC'}{SC}$.

Lời giải.

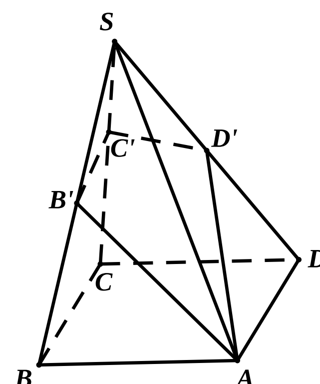
Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{SA}, \vec{b} = \overrightarrow{SA}, \vec{c} = \overrightarrow{SD}$ và $m = \frac{SC'}{SC}$

Ta có $\overrightarrow{SB'} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{SD'} = \frac{1}{2}\vec{c}$ và $\overrightarrow{SC'} = m\overrightarrow{SC} = m\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}\right) = m\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SC'} = 2m\overrightarrow{SB'} - m\overrightarrow{SA} + 2m\overrightarrow{SD'}$

Do A,B',C',D' đồng phẳng nên $2m + (-m) + 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

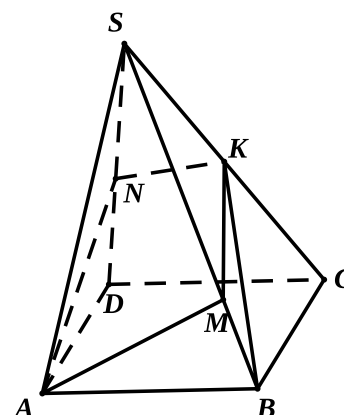
Vậy $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại M,N. Chứng minh $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$.

Lời giải.

Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{SA},\vec{b}=\overrightarrow{SA},\vec{c}=\overrightarrow{SD}$ và $\frac{SB}{SM}=m,\ \frac{SD}{SN}=n$.



Ta có $\overrightarrow{SM}=\frac{SM}{SB}\overrightarrow{SB}=\frac{1}{m}\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SN}=\frac{SN}{SD}\overrightarrow{SD}=\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$

$\overrightarrow{SK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}\right)\ =\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)$

$=\frac{n}{2}\overrightarrow{SN}+\frac{m}{2}\overrightarrow{SM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$.

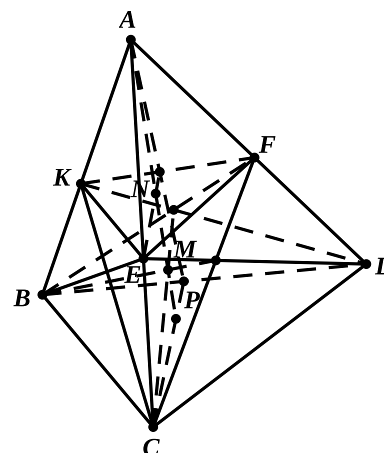
Mặt ta có A,M,K,N đồng phẳng nên $\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow m+n=3$.

Vậy $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh AB,AC,AD lấy các điểm K,E,F. Các mặt phẳng $(BCF),(CDK),(BDE)$ cắt nhau tại M. Đường thẳng AM cắt (KEF) tại N và cắt mặt phẳng (BCD) tại P. Chứng minh $\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.

Lời giải.

- Chỉ ra sự tồn tại của điểm M.



Gọi $I=CF\cap BK\ \Rightarrow CI=(BCF)\cap(CDK)$

Gọi $J=DE\cap CF\Rightarrow(BCF)\cap(BDE)=BJ$

Khi đó $M=CI\cap BJ$ chính là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCF),(CDK),(BDE)$.

- Chứng minh $\frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.

Giả sử $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}=\beta\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}=\gamma\overrightarrow{AF}$

Do M,N thuộc đoạn AP nên tồn tại các số $m,n>1$ sao cho $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AM}=n\overrightarrow{AN}$.

Ta có B,C,D,P đồng phẳng nên tồn tại x,y,z với $x+y+z=1\ (1)$ sao cho $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$

$=\alpha x\overrightarrow{AK}+\beta y\overrightarrow{AE}+\gamma z\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{\alpha x}{n}\overrightarrow{AK}+\frac{\beta y}{n}\overrightarrow{AE}+\frac{\gamma z}{n}\overrightarrow{AF}$

Mặt khác $N\in(KEF)$ nên $\frac{\alpha x}{n}+\frac{\beta y}{n}+\frac{\gamma z}{n}=1\Leftrightarrow\alpha x+\beta y+\gamma z=n\quad(2)$.

Làm tương tự ta có

$M\in(BCE)\Rightarrow x+y+\gamma z=m\ \ (3)$

$M\in(CDK)\Rightarrow x+\beta y+\gamma z=m \quad (4)$

$M\in(BDE)\Rightarrow \alpha x+y+z=m \quad (5)$

Từ $(3),(4),(5)$ suy ra $2(x+y+z)+\alpha x+\beta y+\gamma z=3m$

Kết hợp với $(1),(2)$ ta được $2+n=3m\Leftrightarrow 2+\frac{AP}{AN}=3\frac{AP}{AM}\Leftrightarrow 3+\frac{NP}{NA}=3\left(1+\frac{MP}{MA}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{NP}{NA}=3\frac{MP}{MA}$.(đpcm)

Ví dụ 4. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n\,(n\geq 2)$ nằm trong (P) và S là một điểm nằm ngoài (P). Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh $SA_1,SA_2,...,SA_n$ của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tại các điểm $B_1,B_2,..,B_n$ sao cho $\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SB_2}{SB_2}+...+\frac{SA_n}{SB_n}=a$ ($a>0$ cho trước)

Chứng minh (α) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Trên các canh SA_i lấy các điểm $X_i\,(i=1,2,..n)$ sao cho $SX_i=\frac{SA_i}{a}$

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SX_1}+\overrightarrow{SX_2}+...+\overrightarrow{SX_n}$ thì I là điểm cố định (do các điểm S và $X_1,X_2,..,X_n$ ccos định)

Ta có $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SX_1}+\overrightarrow{SX_2}+...+\overrightarrow{SX_n}=\frac{SX_1}{SB_1}\overrightarrow{SB_1}+\frac{SX_2}{SB_2}\overrightarrow{SB_2}+...+\frac{SX_n}{SB_n}\overrightarrow{SB_n}$

Do $\frac{SX_1}{SB_1}+\frac{SX_2}{SB_2}+...\frac{SX_n}{SB_n}=\frac{SA_1}{aSB_1}+\frac{SA_2}{aSB_2}+...+\frac{SA_n}{aSB_n}=1$ nên các điểm $I,B_1,B_2,...,B_n$ đồng phẳng suy ra mặt phẳng (α) đi qua điểm I cố định.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F là các điểm thỏa nãm $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ còn P,Q,R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA}=l\overrightarrow{PD},\overrightarrow{QE}=l\overrightarrow{QF},\overrightarrow{RB}=l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P,Q,R thẳng hàng.Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. P, Q, R thẳng hàng

B. P, Q, R không đồng phẳng

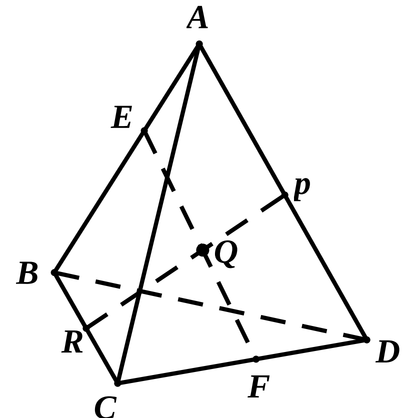
C. P, Q, R không thẳng hàng

D. Cả A, B, C đều sai

Bài làm:

1. Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}$ (1)

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FQ}$ (2)



Từ (2) ta có $l\overrightarrow{PQ}=l\overrightarrow{PD}+l\overrightarrow{DF}+l\overrightarrow{FQ}$ (3)

Lấy $(1)-(3)$ theo vế ta có

$(1-l)\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AE}-l\overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}$

Tương tự $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$

Mặt khác $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ nên $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}=\frac{-k}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{kl}{1-l}\overrightarrow{FC}=-k\overrightarrow{QR}$

Vậy P,Q,R thẳng hàng.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.

a) Giả sử $a.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ thì giá trị của a là?

A. 2 **B.** 1 **C.** -1 **D.** $\frac{1}{2}$

b) Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{IJ}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{JI}$

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{JI}$

c) Xác định vị trí của M để $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất.

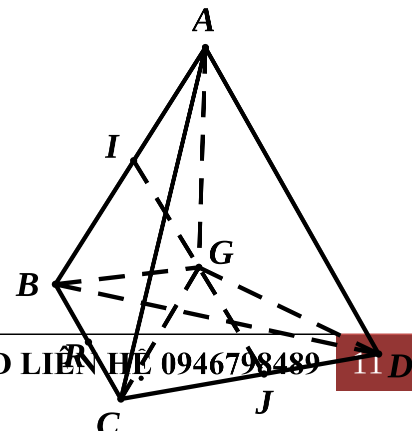
A. Trung điểm AB **B.** Trùng với G **C.** Trung điểm AC **D.** Trung điểm CD

Bài làm:

a) $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}\\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$

$=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}\right)=\vec{0}$.



c) Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MG}\right|$ nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv G$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M,N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN // BD'$. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{2}{3}$

Bài làm:

3. $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.

Giả sử $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$.

Dễ dàng có các biểu diễn $\overrightarrow{BM}=(1-x)\vec{a}+x\vec{b}$ và $\overrightarrow{BN}=(1-y)\vec{a}+\vec{b}+y\vec{c}$. Từ đó suy ra

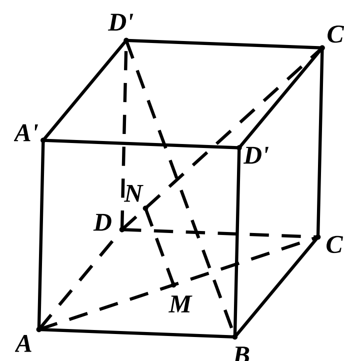
$\overrightarrow{MN}=(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}$ (1)

Để $MN // BD'$ thì $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

$\Leftrightarrow (x-y-z)\vec{a}+(1-x-z)\vec{b}+(y-z)\vec{c}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 1-x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$.



Vậy các điểm M,N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$.

Ta cũng có $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}\Rightarrow\frac{MN}{BD'}=\frac{1}{3}$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $B'A'D'=60^0, B'A'A=D'A'A=120^0$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.

A. $(AB,A'D)=60^0;(AC',B'D)=90^0$ **B.** $(AB,A'D)=50^0;(AC',B'D)=90^0$

C. $(AB,A'D)=40^0;(AC',B'D)=90^0$ **D.** $(AB,A'D)=30^0;(AC',B'D)=90^0$

b) Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

A. $S_{A'B'CD}=a^2\sqrt{3}; S_{AA'C'C}=a^2\sqrt{2}$ **B.** $S_{A'B'CD}=a^2; S_{AA'C'C}=a^2 2\sqrt{2}$

C. $S_{A'B'CD}=\frac{1}{2}a^2; S_{AA'C'C}=2a^2\sqrt{2}$ **D.** $S_{A'B'CD}=a^2; S_{AA'C'C}=a^2\sqrt{2}$

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA'.

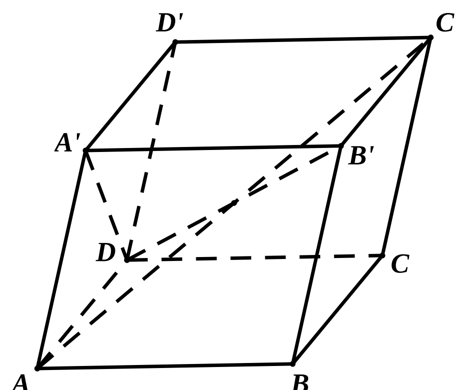
A. $(AC',AB)=(AC',AD)=(AC',AA')=\arccos\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $(AC',AB)=(AC',AD)=(AC',AA')=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $(AC',AB)=(AC',AD)=(AC',AA')=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $(AC',AB)=(AC',AD)=(AC',AA')=\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

Bài làm:



4.

a) Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{A'B'}=\vec{b}, \overrightarrow{A'D'}=\vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{A'D}=\vec{a}+\vec{c}$ nên

$\cos(AB,A'D)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D}\right)\right|$

$=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'D}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A'D}\right|}=\frac{\left|\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}+\vec{c}\right|}$.

Để ý rằng $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=a$, $\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{a^2}{2}$.

Từ đó $\cos(AB,A'D)=\frac{1}{2}\Rightarrow(AB,A'D)=60^0$

Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}, \overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, từ đó tính được

$\overrightarrow{AC'}\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0\Rightarrow(AC',B'D)=90^0$.

b) $\overrightarrow{A'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0$

$\Rightarrow A'C\perp B'D$ nên $S_{A'B'DC}=\frac{1}{2}A'C.B'D$.

Dễ dàng tính được $A'C = a\sqrt{2}, B'D = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{A'B'CD} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}a.\sqrt{2} = a^2$

$S_{AA'C'C} = AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right)$, $AA' = a, Ac = a\sqrt{3}$.

Tính được $\sin\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $S_{AA'C'C} = AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right) = a.a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$.

c) ĐS: $\left(AC', AB\right) = \left(AC', AD\right) = \left(AC', AA'\right) = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC, thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất..

A. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - BC^2}$

B. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

C. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

D. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Bài làm:

5. $S_{ABC} = \frac{1}{2}ABAC\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AB^2\sin^2 A} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2\left(1 - \cos^2 A\right)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$.

Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.

A. $k = \frac{1}{2}$ **B.** $k = \frac{1}{3}$ **C.** $k = \frac{1}{4}$ **D.** $k = \frac{1}{5}$

Bài làm:

6. ***Cách 1.***

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Lại có $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ do đó $MN // AC$.

Vậy Nếu M,N,P,Q đồng phẳng thì $(MNPQ)\cap(ACD)=PQ\,//\,AC$

$\Rightarrow \frac{PC}{PD}=\frac{QA}{QD}=1$ hay $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$.

Cách **2.** Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\overrightarrow{DB}=\vec{b},\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{MP}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+k\vec{c}$, $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

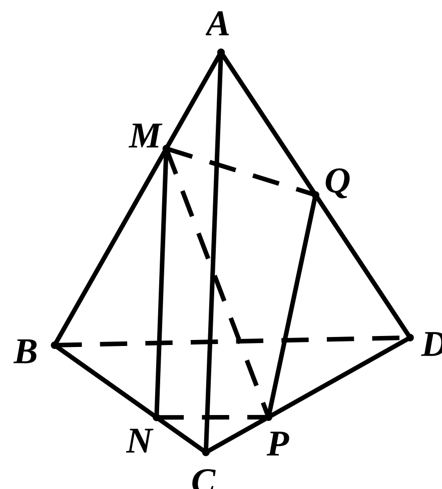
Các điểm M,N,P,Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow \exists x,y:\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MQ}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+k\vec{c}=x\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)+y\left(-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

Do các vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nên điều này tương đương với

$$\begin{cases}-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=-\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}x=k\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4},y=1,k=\frac{1}{2}.$$



Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $ASB=BSC=CSA=\alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB,SC.

Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β).

A. $S=\frac{a^2}{2}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}$ **B.** $S=\frac{a^2}{2}\sqrt{7\cos^2\alpha-6\cos\alpha+9}$

C. $S=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-6\cos\alpha+9}$ **D.** $S=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}$

Bài làm:

7. Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của SB,SC. Thiết diện là tam giác $AB'C'$.

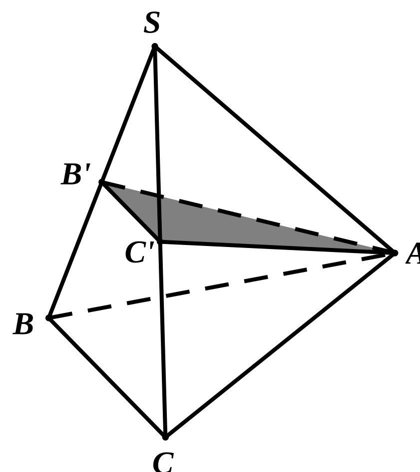
Theo bài tập 5 thì $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{AB'^2AC'^2-\left(\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}\right)^2}$

Ta có $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{SB'}-\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}$

$\Rightarrow AB'^2=\frac{1}{4}SB^2+SA^2-\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SB}$

$=\frac{a^2}{4}(5-4\cos\alpha)$. Tính tương tự, ta có

$\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{AC'}=\frac{a^2}{4}(4-3\cos\alpha)$.



Vậy $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{16}(5-4\cos\alpha)^2-\frac{a^4}{16}(4-3\cos\alpha)^2}$

$=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',G'.Ta có $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=k\frac{SG}{SG'}$. Hỏi k bằng bao nhiêu?

A.3 **B.**4 **C.**2 **D.**1

Bài làm:

8. Do G là trọng tâm của ΔABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow 3\frac{SG}{SG'}\overrightarrow{SG'}=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}$

$+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$

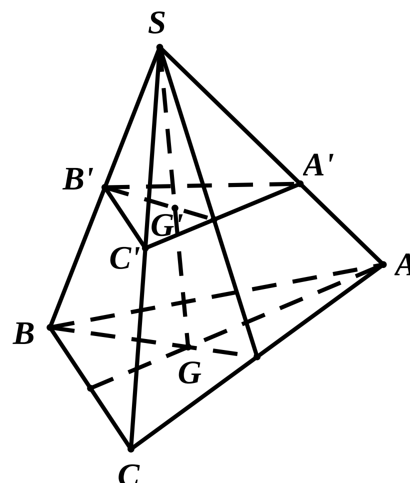
Mặt khác A',B',C',G' đồng phẳng nên

$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$.

Chú ý: Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng :

Nếu M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC thì $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ trong đó S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB. Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau: Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SM (M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',M'.

Chứng minh: $\frac{S_aSA}{SA'}+\frac{S_bSB}{SB'}+\frac{S_cSC}{SC'}=\frac{S.SM}{SM'}$. (Với S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB và S là diện tích tam giác ABC).



Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại A',B',C',D' .Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SA'}+2\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+2\frac{SD}{SD'}$ **B.** $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{2SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{2SD'}$

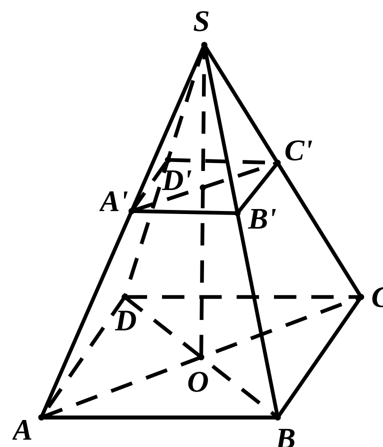
C. $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$ **D.** $\frac{SA}{SA'}-\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}-\frac{SD}{SD'}$

Bài làm:

9. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SC'}=\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$ Do A',B',C',D' đồng phẳng nên đẳng thức trên $\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.



Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a,SB=b,SC=c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC, cắt các cạnh SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}$.

A. $\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$ **C.** $\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$ **D.** $\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$

Bài làm:

10. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$.

Mà G,A',B',C' đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\Leftrightarrow\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$

Theo BĐT Cauchy schwarz:

Ta có $\left(\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}\right)^2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi

$\frac{1}{aSA'}=\frac{1}{bSB'}=\frac{1}{cSC'}$ kết hợp với $\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$ ta được

$SA'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3a},SB'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3b},SC'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3c}$.

Vậy GTNN của $\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}$ là $\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM,BM,CM,DM cắt các mặt $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ lần lượt tại A',B',C',D'. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B',A'C',A'D'$ tại các điểm B_1,C_1,D_1.Khẳng định nào sau đây là đúng nhất. Chứng minh M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

A. M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

B. M là trực tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

C. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

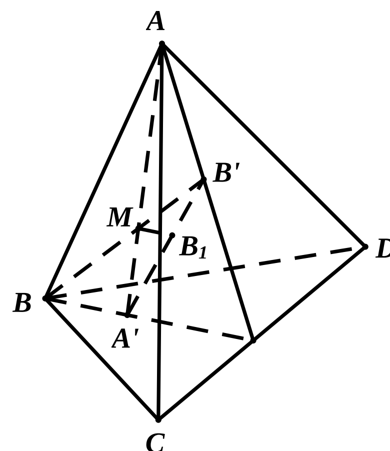
D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

Bài làm:

11. Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên

tồn tại $x,y,z,t>0$ sao cho $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}+t\overrightarrow{MD}=\vec{0}\quad(1)$

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (BCD).



Ta có $\begin{cases}(\alpha) // (BCD)\\ (BB'A') \cap (\alpha) = MB_1\\ (BB'A') \cap (BCD) = BA'\end{cases} \Rightarrow MB_1 // BA'$.

Do đó $\frac{MB_1}{BA'} = \frac{MB'}{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{MB_1} = \frac{MB'}{BB'}\overrightarrow{BA'}$ (2)

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng BB' theo phương (ACD) ta được:

$x\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MB'} + t\overrightarrow{MB'} = \vec{0} \Rightarrow (x+y+z)\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Rightarrow (x+y+z+t)\overrightarrow{MB'} = y\overrightarrow{BB'} \Rightarrow \frac{MB'}{BB'} = \frac{y}{x+y+z+t}$

Từ (2) suy ra $\overrightarrow{MB_1} = \frac{y}{x+y+z+t}\overrightarrow{BA'}$ (3)

Tương tự ta có $\overrightarrow{MC_1} = \frac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{CA'}$ (4)

$\overrightarrow{MD_1} = \frac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{DA'}$ (5)

Mặt khác chiếu các vec tơ trong (1) lên mặt phẳng (BCD) theo phương AA' tì thu được $y\overrightarrow{A'B} + z\overrightarrow{A'C} + t\overrightarrow{A'D} = \vec{0}$. Vậy từ (3),(4),(5) ta có

$\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \frac{1}{x+y+z+t}\left(y\overrightarrow{BA'} + z\overrightarrow{CA'} + t\overrightarrow{DA'}\right) = \vec{0}$, hay M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$

Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt) . Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

A. $\frac{9}{S^2}$ **B.** $\frac{3}{S}$ **C.** $\frac{2}{S^2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{S}$

Bài làm:

12. Do tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ nên $\Delta BCD = \Delta ADC = \Delta DAB = \Delta CBA$. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi

mặt đó thì $S=4S'=\frac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh

$\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\le\frac{9}{S^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le 9R^2$.

Theo công thức Leibbnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+BC^2+3MG^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2+9MG^2\right)$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được

$9R^2=aa^2+b^2+c^2+9OG^2\ge a^2+b^2+c^2$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M,N,P xác định bởi

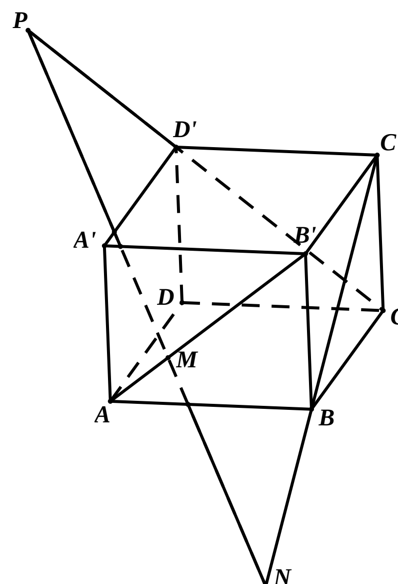
$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB'}\left(k\ne 0\right),\overrightarrow{NB}=x\overrightarrow{NC'},\overrightarrow{PC}=y\overrightarrow{PD'}$.

Hãy tính x,y theo k để ba điểm M,N,P thẳng hàng.

A. $x=\frac{2+k}{2-k},y=-\frac{2}{k}$ **B.** $x=\frac{1+2k}{1-2k},y=-\frac{1}{2k}$ **C.** $x=\frac{\frac{1}{2}+k}{2-k},y=-\frac{1}{2k}$ **D.** $x=\frac{1+k}{1-k},y=-\frac{1}{k}$

Bài làm

13. Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.



Từ giả thiết ta có :

$\overrightarrow{AM}=\frac{k}{k-1}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (1)

$\overrightarrow{AN}=\vec{b}+\frac{x}{x-1}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$ (2) $\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{y}{y-1}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$(3)

Từ đó ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{x}{x-1}\vec{a}-\frac{1}{k-1}\vec{b}+\left(\frac{x}{x-1}-\frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

$+\left(\frac{x}{x-1}-\frac{y}{y-1}\right)\vec{c}$.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-(\frac{y}{y-1}+\frac{1}{k-1})\vec{b}+\left(\frac{y}{y-1}-\frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

Ba điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}$ $\left(*\right)$.

Thay các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ vào $\left(*\right)$ và lưu ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được $x=\frac{1+k}{1-k},y=-\frac{1}{k}$.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

A. $\frac{MA}{MA'} = 1$ **B.** $\frac{MA}{MA'} = \sqrt{2}$ **C.** $\frac{MA}{MA'} = 2$ **D.** $\frac{MA}{MA'} = \sqrt{3}$

✍**Bài làm**

14. Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Vì $M \in AA'$ nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$

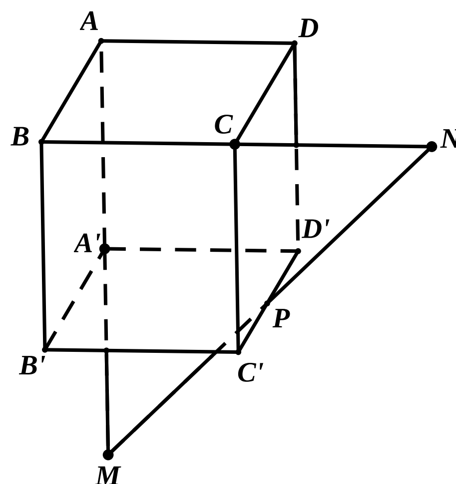
$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l\overrightarrow{BC} = l\vec{a}$, $P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = 2[(1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2$. Vậy $\frac{MA}{MA'} = 2$.



Câu 15. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$.

Ta được S, I, J thẳng hàng tính đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{2} = \frac{JS}{JI}$ **B.** $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{4} = \frac{JS}{JI}$

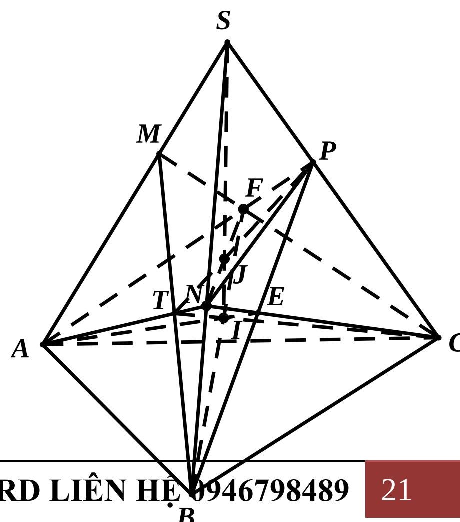
C. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{3} = \frac{JS}{JI}$ **D.** $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$

✍**Bài làm: 15.** Goi $E = BP \cap CN, F = CM \cap AP, T = AN \cap BM$.

Trong (BCM) có $I = BF \cap CT$ trong (ANP) có $NF \cap PT = J$.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{Sp} = z\overrightarrow{PC}$

Ta có $\overrightarrow{SM} = \frac{x}{x+1}\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \frac{y}{y+1}\vec{b}, \overrightarrow{SP} = \frac{z}{z+1}\vec{c}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.



Do $T = AN \cap BM$ nên $\begin{cases} T \in AN \\ T \in BM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ST} = \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{ST} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA} \end{cases} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA}$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{x+1}\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} = \frac{\beta y}{y+1}\vec{b} + (1-\beta)\vec{a}$. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên ta có

$$\begin{cases} \frac{\alpha x}{x+1} = 1-\beta \\ \frac{\beta y}{y+1} = 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{x+y+1} \\ \beta = \frac{y}{x+y+1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{ST} = \frac{x}{x+y+1}\vec{a} + \frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$\overrightarrow{SE} = \frac{y}{y+z+1}\vec{b} + \frac{z}{y+z+1}\vec{c},\quad \overrightarrow{SF} = \frac{z}{z+x+1}\vec{c} + \frac{x}{z+x+1}\vec{a}.$$

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm $I = BF \cap CT$ và $NF \cap PT = J$ ta được :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}\left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right),\quad \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}\left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{SJ} = \frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI} \Rightarrow \overrightarrow{SJ} = (x+y+z+1)\overrightarrow{IJ}$

Vậy S, I, J thẳng hàng và $\frac{SI}{IJ} = x+y+z+1 = \frac{SM}{MA} + \frac{SN}{NB} + \frac{SP}{PC} + 1$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG III. VECTO-QUAN HỆ VUÔNG GÓC

TẬP 2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489 hoặc

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Website: http://tailieutoanhoc.vn/

Email: baovuong7279@gmail.com hoặc tailieutoanhoc7279@gmail.com

MỤC LỤC

GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa: *Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a′ và b′ cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.*

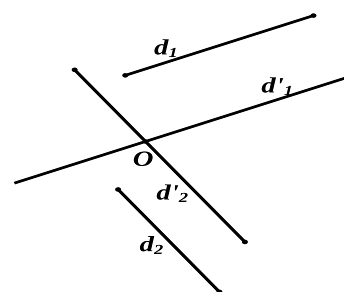
B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).



Từ O dựng các đường thẳng d_1', d_2' lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng d_1', d_2' chính là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2.

Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Cách 2. Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1, d_2

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 xác định bởi $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

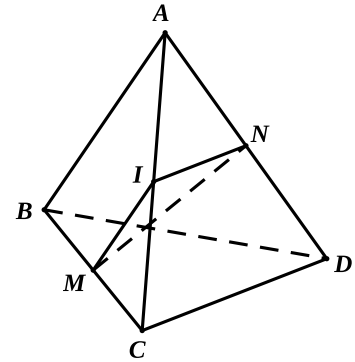
Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}, \left|\overrightarrow{u_1}\right|, \left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB = CD = a, MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Cách 1.



Gọi I là trung điểm của AC. Ta có

$$\begin{cases} IM \parallel AB \\ IN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB,CD) = (IM,IN)$$

Đặt $MIN = \alpha$

Xét tam giác IMN có $IM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, IN = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Theo định lí côsin, ta có $\cos\alpha = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM.IN} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} < 0$

$\Rightarrow MIN = 120^0$ suy ra $(AB,CD) = 06^0$.

Cách 2. $\cos(AB,CD) = \cos(IM,IN) = \frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \left(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}\right)^2 = IM^2 + IN^2 - 2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}$

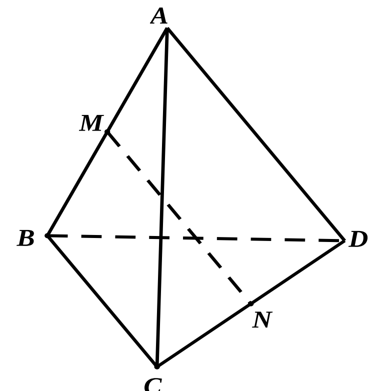
$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2} = -\frac{a^2}{8}$

$\cos(AB,CD) = \left|\cos(IM,IN)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|} = \frac{1}{2}$

Vậy $(AB,CD) = 60^0$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc gữa đường thẳng MN với các đường thẳng AB, BC và CD.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Khi đó, ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = m$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{c},\vec{a}\right) = 60^0$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{m}{2}$.

Vì M,N là trung điểm của AB và CD nên

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right)$

$MN^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c}\right) = \frac{m^2}{2}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{m\sqrt{2}}{2}$.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}-\vec{b}^2\right) = 0$

  Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90^0.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{c}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a}^2+\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}-\vec{c}^2+\vec{b}\vec{c}\right) = 0$

  Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và CD bằng 90^0.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(-\vec{b}+\vec{c}\right) = \dfrac{m^2}{2} \Rightarrow \cos\left(MN, BC\right) = \dfrac{\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{\dfrac{m^2}{2}}{m.\dfrac{m\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45^0.

Bài toán 02: DÙNG TÍCH VÔ HƯỚNG ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

Phương pháp:

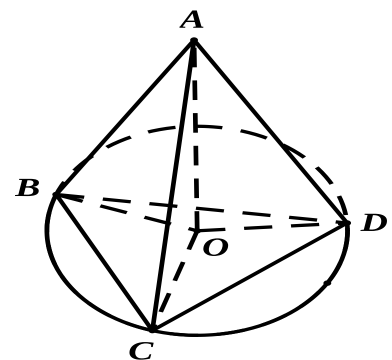
Để chứng minh $d_1 \perp d_2$ ta có trong phần này ta có thể thực hiện theo các cách sau:

- Chứng minh $d_1 \perp d_2$ ta chứng minh $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2} = 0$ trong đó $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vec tơ chỉ phương của d_1 và d_2.
- Sử dụng tính chất $\begin{cases} b \parallel c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.
- Sử dụng định lí Pitago hoặc xác định góc giữa d_1, d_2 và tính trực tiếp góc đó .

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn noại tiếp tam giác BCD. Chứng minh $AO \perp CD$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, ta lưu ý trong tam giác ABC thì

$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

suy ra

$\overrightarrow{AO}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AO}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) = -\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}$

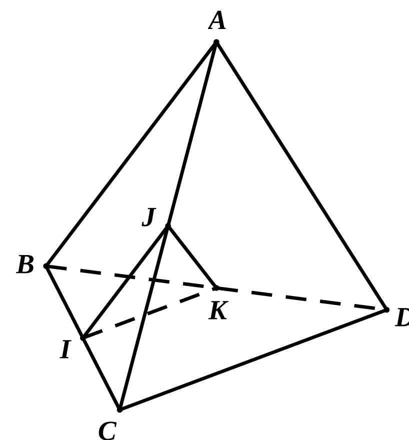
$= -\dfrac{OA^2 + OD^2 - CD^2}{2} + \dfrac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2} = 0$

(Vì $AC = AD = a, OD = OC = R$)

Vậy $AO \perp CD$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD=\frac{4}{3}AB$. Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của BC,AC,BD. Cho biết $JK=\frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB.

Lời giải.



Ta có $IJ=\frac{1}{2}AB$, $IK=\frac{1}{2}CD=\frac{2}{3}AB$

$IJ^2+IK^2=\frac{1}{4}AB^2+\frac{4}{9}AB^2=\frac{25}{36}AB^2 \quad (1)$

Mà $JK=\frac{5}{6}AB\Rightarrow JK^2=\frac{25}{36}AB^2 \quad (2)$

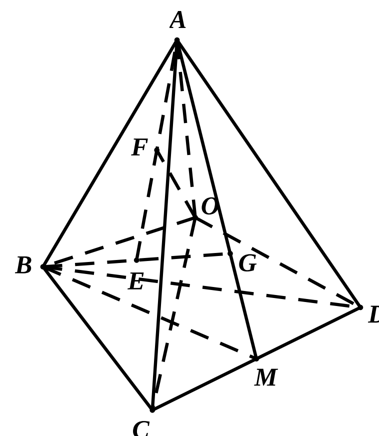
Từ (1) và (2) suy ra $IJ^2+IK^2=JK^2\Rightarrow JI\perp IK$.

Mặt khác ta có $IJ \parallel AB, IK \parallel CD\Rightarrow AB\perp CD$.

Tương tự $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ AB\perp CD \end{cases}\Rightarrow IJ\perp CD$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$. Gọi O là điểm thỏa mãn $OA=OB=OC=OD$ và G là trọng tâm của tam giác ACD, gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE. Chứng minh OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC.

Lời giải.



Đặt $OA=OB=OC=OD=R(1)$ và $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{OD}=\vec{d}$.

Ta có $AB=AC=AD$ nên $\Delta AOB=\Delta AOC=\Delta AOD(c-c-c)$ suy ra

$AOB=AOC=AOD$ (2), từ (1) và (2) suy ra $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=\vec{a}.\vec{d} \quad (3)$.

Gọi M là trung điểm của CD và do $AG=2GM$ nên

$3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}-3\vec{b}(4)$

Gọi E,F theo thứ tự là trung điểm của AE,BG ta có

$12\overrightarrow{OF}=6\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}\right)=6\overrightarrow{OA}+3\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OG}\right)=6\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OG}$

$=6\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}=7\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=7\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} \quad (5)$ Từ (4) và (5) ta có

$36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF}=\left(7\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)\left(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

$=7\vec{a}^2-9\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2-18\vec{a}\vec{b}+8\vec{a}\vec{c}+8\vec{a}\vec{d}+2\vec{c}\vec{d}$.

Theo (3) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF}=2\vec{d}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC}$ suy ra $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC}=0$ hay $OF\perp BG\Leftrightarrow OD\perp AC$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều

a) Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

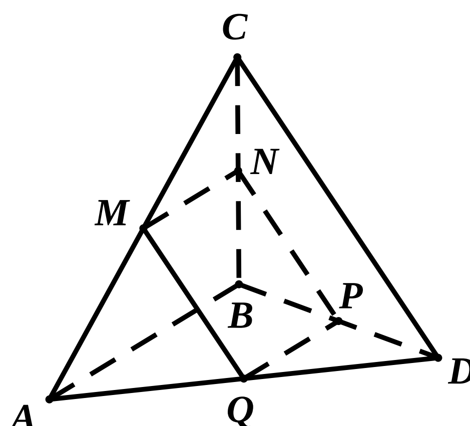
b) Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC,BC,BD,DA. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất? Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.

A. $MNPQ$ là hình vuông **B.** $MNPQ$ là hình bình hành

C. $MNPQ$ là hình chữ nhật **D.** $MNPQ$ là hình thoi

Bài làm 16.

a) Đặt $AB=AD=AC=a$



Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0-\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0=a.a.\frac{1}{2}-a.a.\frac{1}{2}=0$

Vậy $AB\perp CD$.

b) Ta có $MN\parallel PQ\parallel AB$ và $MN=PQ=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases} MN\parallel AB \\ NP\parallel CD \\ AB\perp CD \end{cases}\Rightarrow MN\perp NP$, do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD=NB=x\left(0\le x\le a\right)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AC'\perp B'D'$ **B.** AC′ cắt B′D′

C.AC′và B′D′ đồng phẳng **D.** Cả A, B, C đều đúng

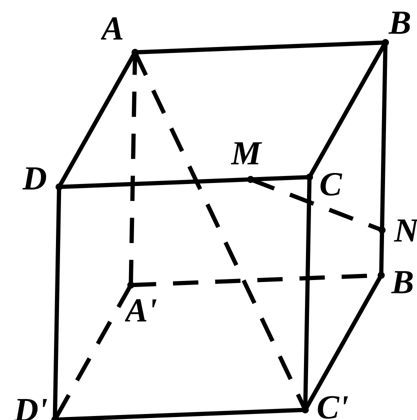
b) khẳng định nào sau đây là đúng ?.

A. $AC' \perp MN$

B. AC′ và MN cắt nhau

C. AC′ và MN đồng phẳng

D. Cả A, B, C đều đúng



Bài làm 17. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'}=\vec{c}-\vec{b}$ nên

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$

$=\vec{a}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+\vec{c}^2-\vec{b}^2=a^2-a^2=0$

$\Rightarrow AC' \perp B'D'$.

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}\right)=\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)[\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}]$

$=\frac{x}{a}\vec{a}^2+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}^2-\vec{c}^2=x.a+\left(1-\frac{x}{a}\right)a^2-a^2=0$.

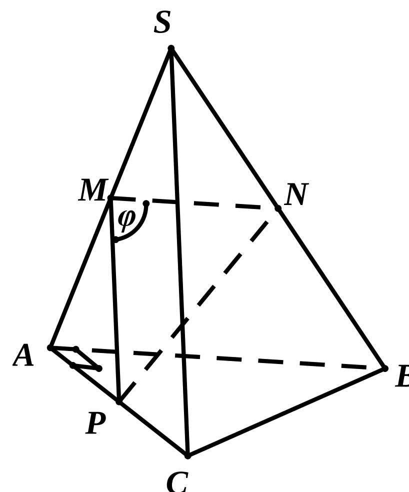
Vậy $AC' \perp MN$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $(AB,SC)=60^0$ **B.** $(AB,SC)=45^0$ **C.** $(AB,SC)=30^0$ **D.** $(AB,SC)=90^0$

Bài làm 18. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SA,SB,AC, khi đó $MN \parallel AB$ nên

$(AB,SC)=(MN,SC)$.



Đặt $\varphi=NMP$, trong tam giác MNP có

$\cos\varphi=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2MN.MP}$ (1) .

Ta có $MN=MP=\frac{a}{2}$, $AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy

$PB^2=AP^2+AC^2=\frac{5a^2}{4}$, $PS^2=\frac{3a^2}{4}$.Trong tam giác PBS theo công thứ tính đường trung tuyến ta có

$$PN^2=\frac{PB^2+PS^2}{2}-\frac{SB^2}{4}=\frac{\frac{5a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}.$$

Thay MN,MP,NP vào (1) ta được $\cos\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=120^0$.

Vậy $(AB,SC)=(MN,SC)=60^0$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA=AB$ và $SA\perp BC$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $(BC,SD)=30^0$ **B.** $(BC,SD)=45^0$ **C.** $(BC,SD)=60^0$ **D.** $(BC,SD)=50^0$

b) Gọi I,J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ\parallel BD$. Chứng minh góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

A. $(IJ,AC)=90^0$ **B.** $(IJ,AC)=60^0$ **C.** $(IJ,AC)=30^0$ **D.** $(IJ,AC)=45^0$

Bài làm 19. a) $(BC,SD)=45^0$ b) $(IJ,AC)=90^0$.

Câu 20. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. $AD\perp BC$ **B.**AD cắt BC

C. AD và BC chéo nhau **D.** Cả A, B, C đều đúng

b) Gọi M,N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}=k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

A. $(MN,BC)=90^0$ **B.** $(MN,BC)=80^0$ **C.** $(MN,BC)=60^0$ **D.** $(MN,BC)=45^0$

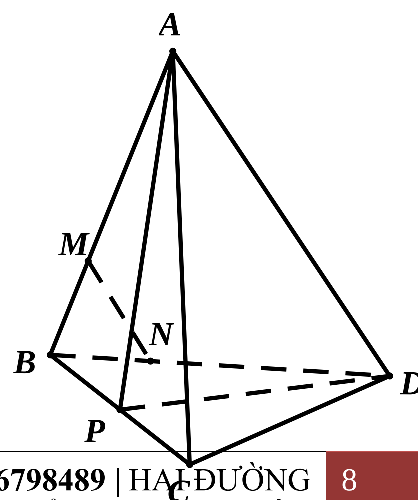
Bài làm 20.

a) Gọi P là trung điểm của BC, thì các tam giác

ABC và DBC cân nên $\begin{cases}AP\perp BC\\DP\perp BC\end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA}\right)=0$

Vậy $BC\perp AD$.



b) Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = |k|$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB} \Rightarrow \frac{ND}{NB} = |k| \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NB}$

suy ra $MN \parallel AD \Rightarrow (MN, BC) = (AD, BC) = 90^0$ (Theo câu a)

Câu 21. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $ABC = B'BA = B'BC = 60^0$ .Tính góc giữa hai đường thẳng AC và B'D'.

A. $(AC, B'D') = 90^0$ **B.** $(AC, B'D') = 60^0$ **C.** $(AC, B'D') = 45^0$ **D.** $(AC, B'D') = 30^0$

Bài làm 21. HS tự giải.

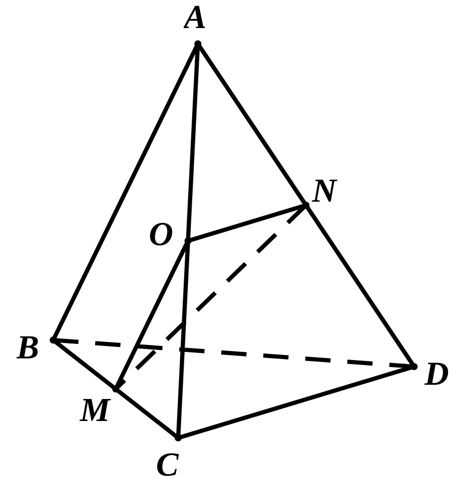
Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $(AB, CD) = 30^0$ **B.** $(AB, CD) = 45^0$

C. $(AB, CD) = 60^0$ **D.** $(AB, CD) = 90^0$

Bài làm 22. Gọi O là trung điểm của AC, ta có $OM = ON = a$.

$\begin{cases} OM \parallel AB \\ ON \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (OM, ON)$



Áp dụng định lí côsin cho tam giác OMN ta có

$$\cos MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2.a.a} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $(AB, CD) = 60^0$.

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC và AC.

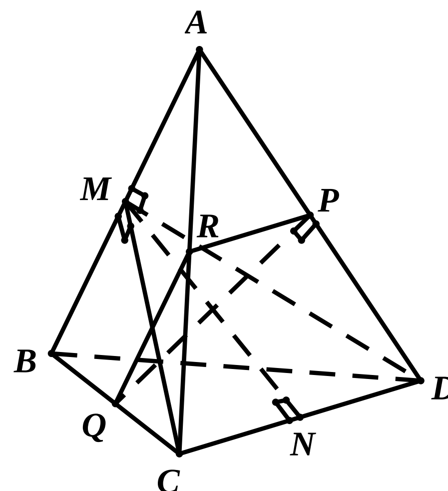
a) Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**?

A. $MN \perp RP, MN \perp RQ$ **B.** $MN \perp RP$, MN cắt RQ

C. MN chéo RP; MN chéo RQ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Tính góc của hai đường thẳng AB và CD?

A. $(AB,CD)=60^0$ **B.** $(AB,CD)=30^0$ **C.** $(AB,CD)=45^0$ **D.** $(AB,CD)=90^0$



Bài làm23. a) Ta có $MC=MD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $MN\perp CD$.

Lại có $RP\,||\,CD\Rightarrow MN\perp RQ$.

b) Tương tự ta có $QP\perp AD$

Trong tam giác vuông PDQ ta có

$QP^2=QD^2-DP^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$ Ta có :

$RQ^2+RP^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2=QP^2$

Do đó tam giác RPQ vuông tại R, hay $RP\perp RQ$.

Vì vậy $\begin{cases} AB\,||\,RQ \\ CD\,||\,RP \\ RP\perp RQ \end{cases}\Rightarrow AB\perp CD$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a, AC=BD=b, AD=BC=c$.

a)Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**.

A. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó

B. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì không vuông góc với hai cạnh đó

C. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì *có thể vuông góc có thể không vuông góc* với hai cạnh đó

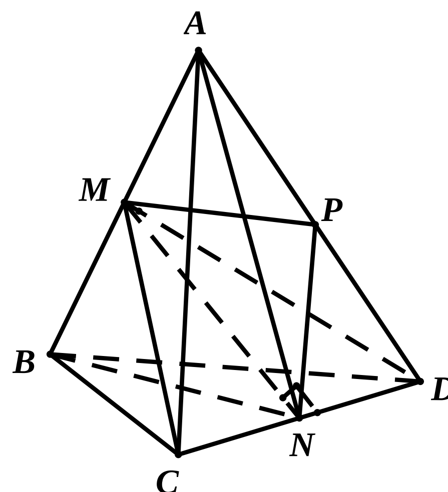
D. cả A, B, C đều sai

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

A. $(AC,BD)=\arccos\left|\frac{(a^2-c^2)}{b^2}\right|$

B. $(AC,BD)=\arccos\left|\frac{2(a^2+c^2)}{b^2}\right|$

C. $(AC,BD)=\arccos\left|\frac{2(a^2-c^2)}{3b^2}\right|$



D. $(AC,BD)=\arccos\left|\dfrac{2(a^2-c^2)}{b^2}\right|$

Bài làm 24. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,CD,AD.

a) Do hai tam giác ACD và BCD có CD chung và $AC=BD,AD=BC$ nên chúng bằng nhau, suy ra $MC=MD$

Vậy tam giác MCD cân tại M và có trung tuyến MN nên $MN\perp CD$.

Tương tự $MN\perp AB$.

Chứng minh tương tự cho hai cặp cạnh đối còn lại .

b) Ta có $\begin{cases}PM \parallel BD\\ PN\parallel AC\end{cases}\Rightarrow (BD,AC)=(PM,PN)$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$CM^2=\frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

Tương tự $DM^2=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, nên $MN^2=\dfrac{MC^2+MD^2}{2}-\dfrac{CD^2}{4}=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác PMN ta có

$$\cos MPN=\frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2.PM.PN}=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}{2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{2(a^2-c^2)}{b^2}$$

Vậy $(AC,BD)=\arccos\left|\dfrac{2(a^2-c^2)}{b^2}\right|$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB=a,AD=2a$.

Tam giác SAB vuông can tại A, M là một điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song sog với (SAB) cắt BC,SC,SD lần lượt tại N,P,Q.

a) $MNPQ$ là hình gi?.

A. $MNPQ$ là hình thang vuông.

B. $MNPQ$ là hình vuông.

C. $MNPQ$ là hình chữ nhật.

D. $MNPQ$ là hình bình hành.

b)Tính diện tích của $MNPQ$ theo a.

A. $S_{MNPQ}=\dfrac{3a^2}{8}$ **B.** $S_{MNPQ}=\dfrac{a^2}{8}$ **C.** $S_{MNPQ}=\dfrac{3a^2}{4}$ **D.** $S_{MNPQ}=\dfrac{a^2}{4}$

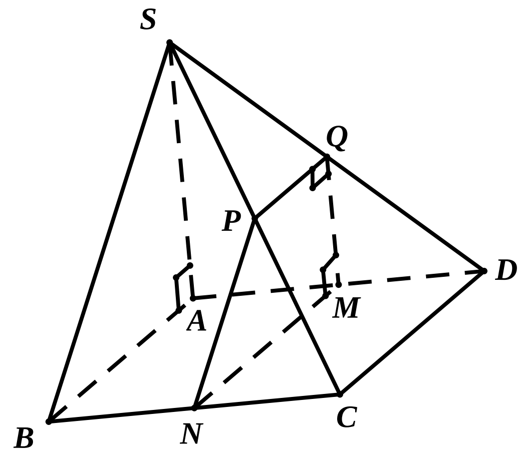
Bài làm 25. a) Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\(\alpha)\cap(ABCD)=MN\end{cases}\Rightarrow MN\parallel AB$.

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(SBC)\cap(SAB)=SB\\(\alpha)\cap(SBC)=NP\end{cases}\Rightarrow NP\parallel SB$

$\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(SAD)\cap(SAB)=SA\\(\alpha)\cap(SAD)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ\parallel SA$

Dễ thấy $MN\parallel PQ\parallel AB\parallel CD$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $\begin{cases}MN\parallel AB\\MQ\parallel SA\\AB\perp SA\end{cases}\Rightarrow MN\perp MQ$.



Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Ta có $MN=AB=a$, $MQ=\frac{SA}{2}=\frac{a}{2}$, $PQ=\frac{CD}{2}=\frac{a}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MN+PQ).MQ$

$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}=\frac{3a^2}{8}$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG III. VECTO- QUAN HỆ VUÔNG GÓC

TẬP 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Website: http://tailieutoanhoc.vn/

Email: baovuong7279@gmail.com hoặc tailieutoanhoc7279@gmail.com

MỤC LỤC

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

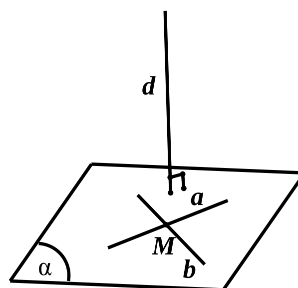
1. Định nghĩa.

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm tromg (α).

Vậy $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$.

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Định lí: Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm tromg (α) $\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$.



3. Tính chất.

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. Sự liên quan giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.

1. $\begin{cases} a \,//\, b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b$ (h1)

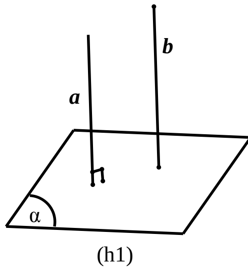
2. $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \,//\, b$ (h2)

3. $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$ (h3)

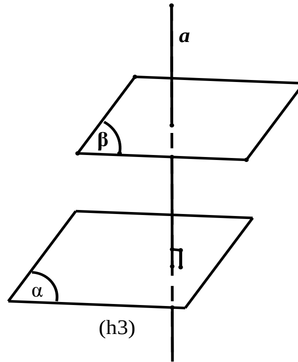
4. $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta)$ (h4)

5. $\begin{cases} a // (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$ (h5)

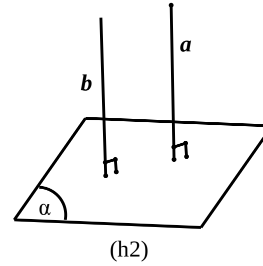
6. $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (\alpha)$ (h6)



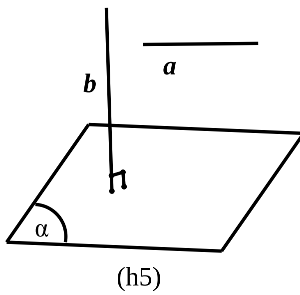
(h1)



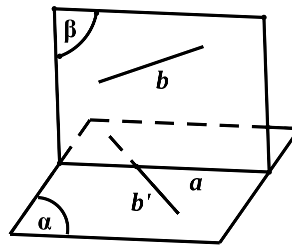
(h3)

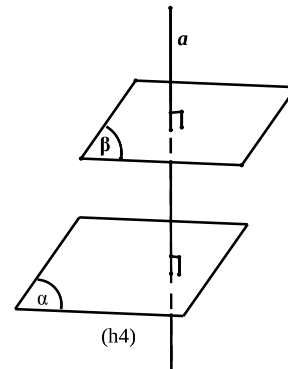


(h2)



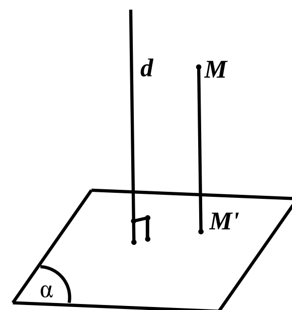
(h5)





(h4)

5. Phép chiếu vuông góc và định lý ba đường vuông góc.



5.1. Định nghĩa : Cho đường thẳng $d\perp(\alpha)$.

Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).

5.2. Định lí ba đường vuông góc.

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu

của b trên (α). Khi đó $a\perp b \Leftrightarrow a\perp b'$.

5.3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

- Nếu d vuông góc với và mặt phẳng (α) thì ta nói góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90^0.
- Nếu d không vuông góc với và mặt phẳng (α) thì góc giữa d với hình chiếu d' của nó trên (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Muốn chứng minh đương thẳng $d\perp(\alpha)$ ta có thể dùng môt trong hai cách sau.

Cách 1. Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau trong (α).

$$\begin{cases} d\perp a \\ d\perp b \\ a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b = I \end{cases} \Rightarrow a\perp(\alpha)$$

***Cách** 2*. Chứng minh d vuông góc với đường thẳng a mà a vuông góc với (α).

$$\begin{cases} d \,//\, a \\ (\alpha)\perp a \end{cases} \Rightarrow d\perp(\alpha)$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. ***Ví dụ 1.*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD.

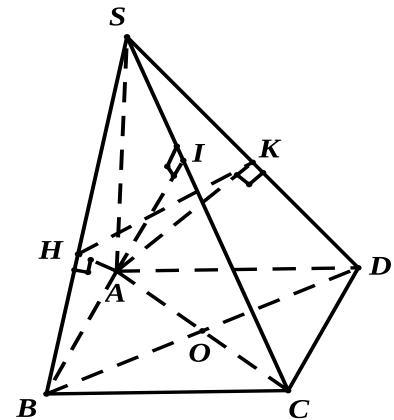
a) Chứng minh $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD), BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK).

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Lời giải.

a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$, lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.



Vậy $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

b) Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Tương tự $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Vậy $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

$\begin{cases} A \in (AHK) \\ AI \perp SC \\ SC \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \subset (AHK)$.

c) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau (do có SA chung và $AB = AD$) suy ra

$SB = SD, SH = SK \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD$

Mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow HK \perp AC$.

Vậy $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC)$.

$\begin{cases} AI \subset (SAC) \\ HK \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp AI$.

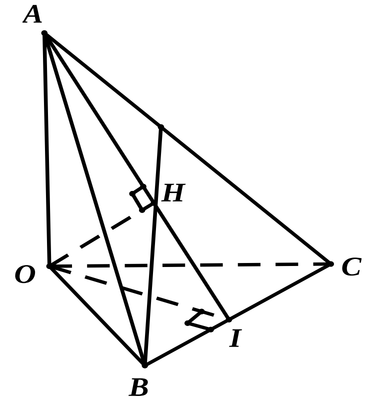
Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

a) $BC \perp (OAH)$

b) H là trực tâm của ΔABC

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \quad (1)$

Lại có $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Do $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC \quad (3)$

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC \quad (4)$ Từ (3) và (4) suy ra

$AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH \quad (5)$

Lại có $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC \quad (6)$. Từ $(5),(6)$ suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Gọi $I = AH \cap BC$, do $\begin{cases} OI \subset (OAH) \\ BC \perp (OAH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp OI$

Ta giác OAI vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} \quad (*)$.

Tương tự cho tam giác OBC ta có $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ thay vào (*) thu được $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α), một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A; trên d lấy điểm $S \neq A$ và trên (C) lấy điểm M (M khác A,B).

a) Chứng minh $MB \perp (SAM)$.

b) Dựng AH vuông góc với SB tại H; AK vuông góc với SM tại K. Chứng minh $AK \perp (SBM), SB \perp (AHM)$

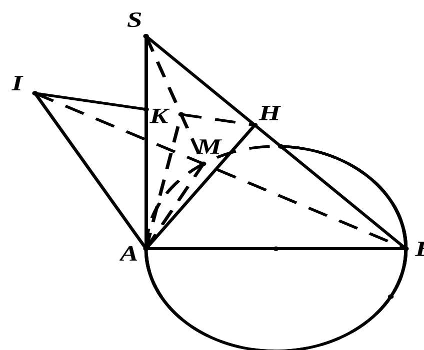
c) Gọi I là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} SA \perp (\alpha) \\ MB \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow SA \perp MB \quad (1)$

Lại có $MB \perp MA \quad (2)$ (t/c góc chắn nửa đường tròn)

Từ $(1),(2)$ suy ra $MB \perp (SAM)$.



b) Ta có $AK \perp SM$,

$MB \perp (SAM), AK \subset (SAM) \Rightarrow MB \perp AK$.

Suy ra $AK \perp (SBM)$.

Tương tự $\begin{cases} AK \perp (SBM) \\ SB \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow AK \perp SB$,

lại có $AH \perp SB$ suy ra $SB \perp (AHK)$.

c) Ta có $\begin{cases} AI \subset (AHK) \\ SB \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SB \quad (3)$

$\begin{cases} AI \subset (\alpha) \\ SA \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SA \quad (4)$. Từ $(3),(4)$ suy ra $AI \perp (SAB) \Rightarrow AI \perp AB$ hay AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

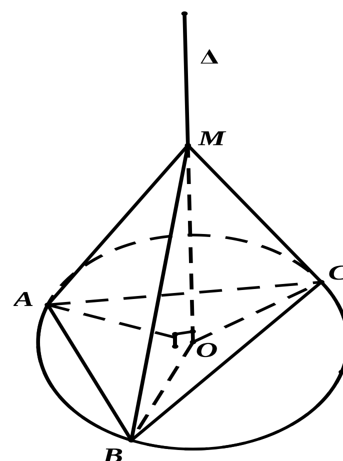
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có góc $A = 120^0$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$. Lấy điểm $S \notin (ABC)$ sao cho $SA = a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Chứng minh $AO \perp (SBC)$.

Lời giải.

Để giải bài toán này, trước tiên chúng ta chứng minh một kết quả sau:

Trong không gian tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó. (đường thẳng này được gọi là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó).

Chứng minh: Gọi M là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC và O là hình chiếu của trên của M trên (ABC).



Các tam giác vuông MOA, MOB, MOC có MO chung.

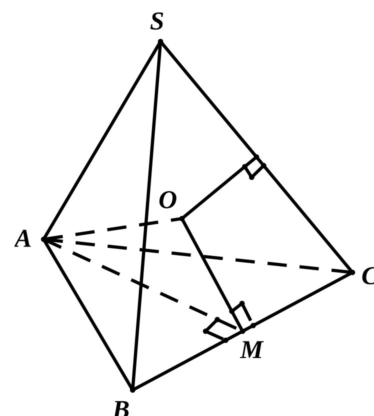
Vậy $MA = MB = MC \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác là đường thẳng vuông góc với mạt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Quay lại bài toán

Gọi M là trung điểm của BC, ta có ΔABC cân tại $A \Rightarrow AM \perp BC$.

$AB = \dfrac{BM}{\sin 60^0} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a$. Mặt khác $AC = a$

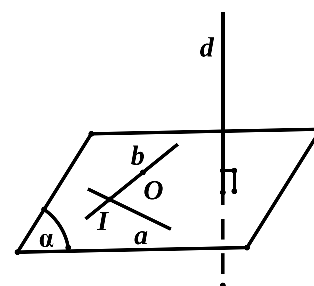


suy ra $AS = AB = AC = a$, điểm A cách đều ba đỉnh S, B, C của ΔSBC, do đó gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC thì AO là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC suy ra $AO \perp (SBC)$.

Bài toán 02: THIẾT DIỆN ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Để xác định thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d với một hình chóp ta thực hiện theo một trong hai cách sau:



Cách 1. Tìm tất cả các đường thẳng vuông góc với d, khi đó (α) sẽ song song hoặc chứa các đường thẳng này và ta chuyển về dạng thiết diện song song như đã biết ở (dạng 2, §2 chương II).

Cách 2. Ta dựng mặt phẳng (α) như sau:

Dựng hai đường thẳng a,b cắt nhau cùng vuông góc với d trong đó có một đường thẳng đi qua O, khi đó (α) chính là mặt phẳng $mp(a,b)$.

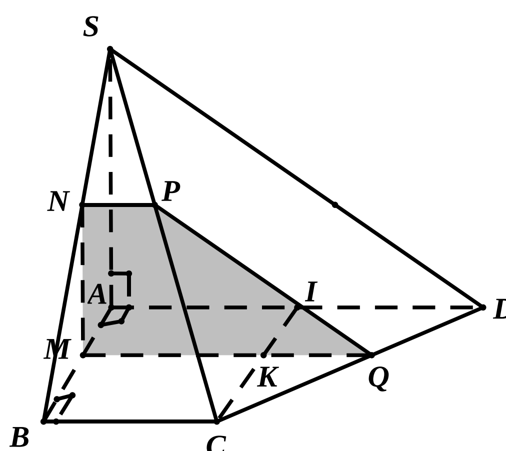
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,B với $AB=BC=a, AD=2a$; $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AB. Đặt $AM=x(0<x<a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} B\notin(\alpha) \\ BC\perp AB \\ (\alpha)\perp AB \end{cases} \Rightarrow BC // (\alpha)$.

Tương tự $\begin{cases} A\notin(\alpha) \\ SA\perp AB \\ (\alpha)\perp AB \end{cases} \Rightarrow SA // (\alpha)$.

Do $\begin{cases} M\in(ABCD) \\ BC\subset(ABCD) \\ BC // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(ABCD)=MQ // BC, Q\in CD$.

Tương tự $\begin{cases} M\in(SAB)\cap(\alpha) \\ SA\subset(SAB) \\ SA // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SAB)=MN // SA, N\in SB$.

$\begin{cases} N\in(SBC)\cap(\alpha) \\ BC\subset(SBC) \\ BC // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SBC)=NP // BC, P\in SC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $\begin{cases} MQ // BC \\ NP // BC \end{cases} \Rightarrow MQ // NP$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Mặt khác $\begin{cases} MQ // AB \\ MN // SA \\ SA\perp AB \end{cases} \Rightarrow MQ\perp MN$ suy ra thiết diện là một hình thang vuông tại M và N.

$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MQ+NP)MN$

Gọi I là trung điểm của AD và $K = CI \cap MQ$.

Do $MN // SA$ nên $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{BM.SA}{BA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NP = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{a.x}{a} = x$.

Xét trong hình thang $ABCD$ ta có :

$\frac{KQ}{ID} = \frac{CK}{CI} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow KC = \frac{ID.BM}{BA} = \frac{a(a-x)}{a} = a - x$

$MQ = MK + KQ = a + (a-x) = 2a - x$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2a - x + x)2(a-x) = 2a(a-x)$.

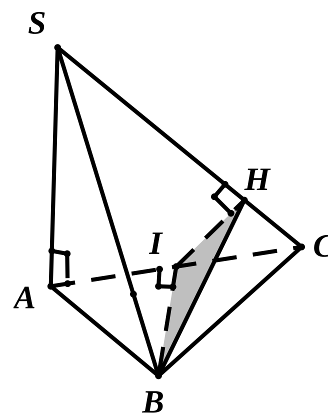
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích của thiết diện này.

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm của AC, dựng $IH \perp SC, H \in SC$.



Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC)$. Mặt khác $IH \perp SC$ nên $(BIH) \perp SC$. Vậy (BIH) chính là mặt phẳng (α) đi qua B và vuông góc với SC.

Thiết diện là tam giác IBH.

b) Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow IB \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

$BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều cạnh a).

Hai tam giác CHI và CAS có góc C chung nên chúng đồng dạng. Từ đó suy ra

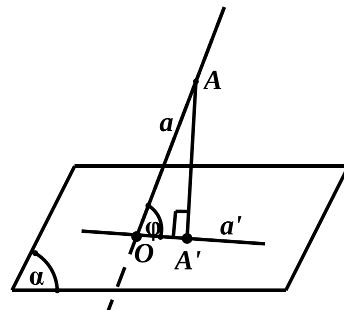
$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI.SA}{CS} = \frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{\frac{a}{2}.2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $S_{BIH} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Bài toán 03: TÍNH GÓC GỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp:

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau:



- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ xuống (α)
- Góc $AOA' = \phi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).

Lưu ý:

- Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b \perp (\alpha)$ khi đó $AA' // b$.
- Để tính góc ϕ ta sử dung hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc ϕ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\phi = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$ trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (α).

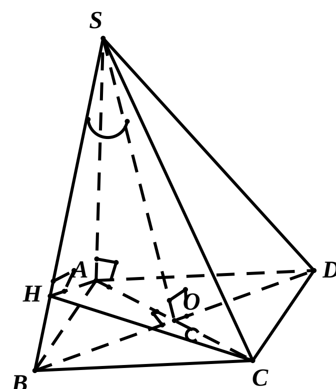
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính

a) Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC).

b) Góc giữa AC với mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$ suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Vậy $(SB,(SAC)) = BSO = \varphi$.

$$\sin\phi = \frac{BO}{SB} = \frac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$\Rightarrow \phi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

b) Trong (SAB) gọi H là hình chiếu của A trên SB

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ đó ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$, hay CH là hình chiếu của CA trên (SBC). Vậy

$(AC,(SBC)) = ACH = \alpha$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

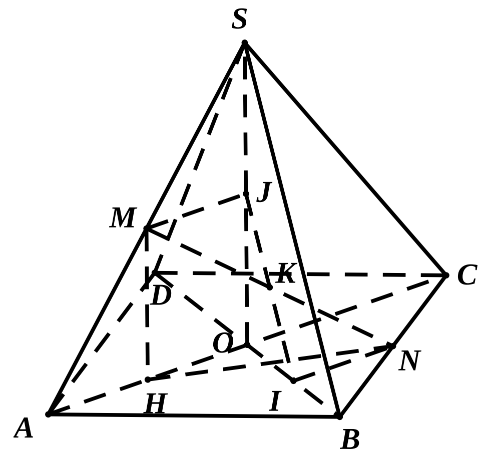
$$\sin\alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{a\sqrt{\frac{6}{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, O là tâm của đáy, $SO \perp (ABCD)$; M,N lần lượt là trung điểm của SA,CD. Biết góc giữa MN với $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời giải.

Cách 1. Kẻ $MH // SO, H \in OA$.

Do $\begin{cases} MH // SO \\ SO \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MH \perp (ABCD)$ suy ra NH là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$ $\Rightarrow MNH$ chính là góc giữa đường thẳng MN với $(ABCD)$.



$$HB^2 = OH^2 + OB^2$$

Ta có $= \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2}$.

$$= \frac{5a^2}{8}$$

$\Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Xet ΔMHN có $MN = \frac{HN}{\cos 60^0} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $MH = NH\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.

Gọi I là trung điểm của OB, J là trung điểm của SO thì $MJ // IN$ và $MJ = IN$. Gọi $K = IJ \cap MN \Rightarrow JK = \frac{1}{2}IJ$ và $MJ \perp (SBD) \Rightarrow MKJ$ là góc giữa MN và (SBD).

Ta có $IJ^2 = JO^2 + OI^2 = MH^2 + OI^2 = \frac{15a^2}{8} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 2a^2$.

$\Rightarrow IJ = a\sqrt{2}$ và $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $\widehat{MKJ} = \phi \Rightarrow \tan\phi = \dfrac{MJ}{JK} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\phi = \arctan\dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)$

Suy ra $MN^2 = \dfrac{1}{4}\left(SO^2 + AC^2 + OB^2\right) = \dfrac{1}{4}\left(SO^2 + \dfrac{5a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \dfrac{5a^2}{2}}$.

Ta có ϕ là góc giữa MN và (SBD) nên $\sin\phi = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}\right|}$ ($\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (SBD)).

Do $\begin{cases} AC \perp SO \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$ nên chọn $\vec{n} = \overrightarrow{AC}$, từ đó ta có

$$\sin\phi = \frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{AC}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2SO^2 + 5a^2}}(*)$$

Do góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60^0 nên

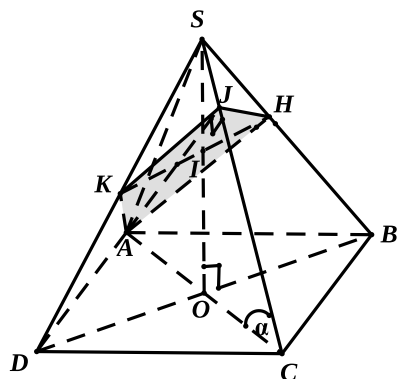
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SO}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{SO}\right|} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}SO^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.SO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 8SO^2 = 3\left(2SO^2 + 5a^2\right)$$

$\Leftrightarrow 2SO^2 = 15a^2$. Thay vào $(*)$ suy ra $\sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \phi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\phi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO \perp (ABCD)$.Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td} = \dfrac{1}{2}a^2$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.



Giả sử (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm H, J, K. Do

$\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ mà $(\alpha) \perp SC \Rightarrow (\alpha) // BD$.

Vậy $\begin{cases} BD \subset (SBD) \\ BD // (\alpha) \\ (SBD) \cap (\alpha) = HK \end{cases} \Rightarrow KH // BD \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AJ$

do đó $S_{AHJK} = \frac{1}{2} HK.AI$.

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ suy ra $(SC, (ABCD)) = SCO = \phi$.

Ta có $AJ = AC \sin\phi = a\sqrt{2}\sin\phi$; $SO = OC\tan\phi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\phi$.

$\Delta SOC \sim \Delta SJI \Rightarrow SIJ = SCO = \phi \Rightarrow AIO = SIJ = \phi$.

Từ đó ta có $OI = OA\cot\phi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\phi$.

$$\frac{HK}{BC} = \frac{SI}{SO} = 1 - \frac{OI}{SO} = 1 - \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\phi}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\phi} = 1 - \cot^2\phi$$

$\Rightarrow KH = BD\left(1 - \cot^2\phi\right) = a\sqrt{2}\left(1 - \cot^2\phi\right)$.

Vậy $S_{AHJK} = \frac{1}{2} HK.AI = a\sqrt{2}\sin\phi . a\sqrt{2}\left(1 - \cot^2\phi\right) = 2a^2\sin\phi\left(1 - \cot^2\phi\right)$

Từ giả thiết suy ra $2a^2\sin\phi\left(1 - \cot^2\phi\right) = \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow 4\sin^2\phi - \sin\phi - 2 = 0$

$\sin\phi = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ (do $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\phi > 0$)

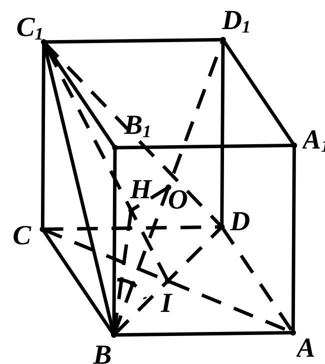
$\Leftrightarrow \phi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\phi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông . Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1).

Lời giải.

Cách 1.



Gọi $I=AC\cap BD, O$ là trung điểm của BD_1 thì $O\in(CAA_1C_1)$.

Do $\begin{cases}BD\perp AC\\ BD\perp CC_1\end{cases}\Rightarrow BD\perp(CAA_1C_1)$, hạ $OH\perp IC_1, H\in IC_1$ thì

$OH\perp(BDC_1)$, vậy góc giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1) là

góc $OBH=\alpha$. Đặt $AB=AD=a, AA_1=b$ thì

$BD_1=\sqrt{AB^2+AB^2+DD_1^2}=\sqrt{2a^2+b^2}$

$\Rightarrow OB=\dfrac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

Dễ thấy $HO=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)+5}}$

Do $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\geq 2\Rightarrow \sin\alpha\leq\dfrac{1}{3}\Rightarrow\alpha\leq\arcsin\dfrac{1}{3}$ (Do $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$)

Vậy $\max\alpha=\arcsin\dfrac{1}{3}$ khi $a=b$.

Cách 2. $\overrightarrow{CB}=\vec{x}, \overrightarrow{CD}=\vec{y}, \overrightarrow{CC_1}=\vec{z}\Rightarrow|\vec{x}|=|\vec{y}|=a, |\vec{z}|=b$

$\overrightarrow{BD_1}=-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$, $\left|\overrightarrow{BD_1}\right|=\sqrt{\vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2}=\sqrt{2a^2+b^2}$

Gọi H là hình chiếu của C trên C_1I thì $CH\perp C_1I$ và $CH\perp BD\Rightarrow CH\perp(BDC_1)$.

Ta có $\dfrac{C_1H}{IH}=\dfrac{C_1H.C_1I}{IH.IC_1}=\dfrac{CC_1^2}{CI^2}=\dfrac{b^2}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{2b^2}{a^2}$ nên

$$\overrightarrow{CH}=\frac{1}{1+\dfrac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CC_1}+\frac{\dfrac{2b^2}{a^2}}{1+\dfrac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CI}=\frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}.2\overrightarrow{CI}$$

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CI}=\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}$$

$$\left|\overrightarrow{CH}\right|=\sqrt{\frac{b^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{x}^2+\frac{b^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{y}^2+\frac{a^4}{(a^2+2b^2)^2}\vec{x}^2}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

Vậy $\sin\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{CH}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\dfrac{\left|\left(-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)\left(\dfrac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\dfrac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\dfrac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}\right)\right|}{\sqrt{2a^2+b^2}\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}}$

$=\dfrac{ab}{\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)\left(2a^2+b^2\right)}}$.

Theo BĐT AGM ta có $\dfrac{ab}{\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)\left(2a^2+b^2\right)}}\le\dfrac{ab}{\sqrt{3\sqrt[4]{a^2b^4}\,3\sqrt[4]{b^2a^4}}}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $\sin\alpha\le\dfrac{1}{3}\Rightarrow\alpha\le\arcsin\dfrac{1}{3}\Rightarrow\max\alpha=\arcsin\dfrac{1}{3}$ khi $a=b$.

Bài toán 04: TÌM TẬP HỢP HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG HAY MỘT MẶT PHẲNG DI ĐỘNG.

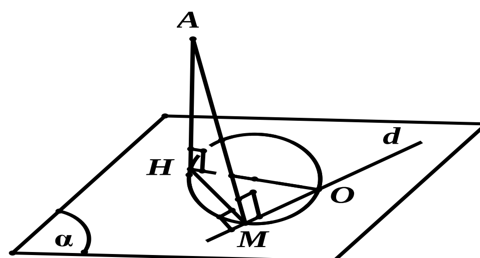
Phương pháp:

Để giải các bài toán dạng này trước tiên ta cần nắm chắc lời giải của hai bài toán gốc sau:

Bài Toán 1: Trong không gian cho (α) và hai điểm cố định A và O với $A\notin(\alpha), O\in(\alpha)$, d là một đường thẳng di động trong (α) và luôn đi qua O. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d. Tìm tập hợp điểm H khi d di động.

Lời giải.

Dựng $AH\perp(\alpha)$ suy ra H cố định.



Ta có $\begin{cases}d\perp AH\\ d\perp AM\end{cases}\Rightarrow d\perp(AMH)$

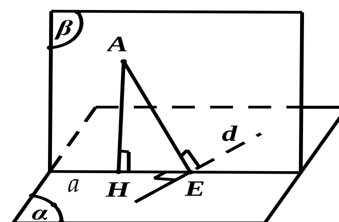
$\Rightarrow d\perp HM$.

Trong mặt phẳng (α) điểm M nhìn đoạn OH cố định dưới một góc vuông suy ra M thuộc đường tròn đường kính OH trong (α).

Bài Toán 2: Trong không gian cho đường thẳng d và điểm A cố định (α) là mặt phẳng di động nhưng luôn chứa d. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên (α) khi (α) di động.

Lời giải.

Gọi (β) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d và $a=(\alpha)\cap(\beta)$. Trong (β) gọi H là hình chiếu của A trên a và $E=d\cap(\beta)$. Ta có A, E cố định và trong mặt phẳng (β) điểm H nhì đoạn AE dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

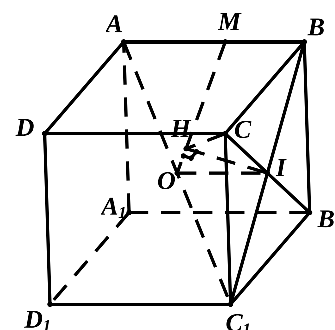


Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các mặt đều là hình vuông với O là tâm của hình hộp và M là một điểm chuyển động trên đoạn AB. Gọi H là hình chiếu của C xuống đường thẳng OM. Tìm quỹ tích điểm H

Lời giải.

Phần thuận.



Gọi $I = C_1B \cap BC_1$, do $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow AB \perp CI$

mà $CI \perp BC_1 \Rightarrow CI \perp (ABC_1D_1) \Rightarrow CI \perp OH$, mặt khác $OH \perp CH$ nên $OH \perp (CHI) \Rightarrow OH \perp IH$. Điểm H nhì đoạn thẳng OI cố định dưới một góc vuông đồng thời $H \in OM \subset (ABC_1D_1)$ cố định nên H thuộc đường tròn đường kính OI trong (ABC_1D_1).

Giới hạn.

Khi $M \equiv A$ thì $H \equiv H_1$ trong đó H_1 là hình chiếu của C trên AC_1.

Khi $M \equiv B$ thì $H \equiv H_2$ trong đó H_2 là hình chiếu của C trên D_1B.

Vậy H chạy trên cung H_1H_2

Phần đảo.

Giả sử H' là một điểm bất kì trên cung H_1H_2, ta chứng minh tồn tại điểm M' trên đoạn AB sao cho H' là hình chiếu của C trên OM'.

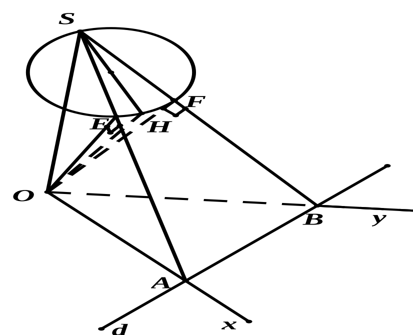
Gọi $M' = OH' \cap AB$. Dễ thấy $IC \perp (ABC_1) \Rightarrow IC \perp OM'$

Vậy $\begin{cases} OM' \perp IC \\ OM' \perp IH' \end{cases} \Rightarrow OM' \perp (ICH') \Rightarrow CH' \perp OM'$, hay H' là hình chiếu của C trên OM'.

Kết luận : Tập hợp điểm H là cung H_1H_2.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho một điểm O cố định, một đường thẳng d cố định không đi qua O, một góc vuông xOy quay xung quanh điểm O. Các tia Ox, Oy cắt d theo thứ tự tại A, B. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) và đi qua O, lấy một điểm S cố định. Dựng $OE \perp SA, OF \perp SB$. Tìm quỹ tích các điểm E và F khi vuông xOy quay xung quanh điểm O.

Lời giải.



Dựng $OH \perp (SAB)$ thì H cố định . Do $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH \perp SE$, mặt khác $OE \perp SE$ $\Rightarrow SE \perp (OEH) \Rightarrow SE \perp EH$. Điểm E nhìn đoạn SH cố định trong mặt phẳng $mp(S,d)$ nên E thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

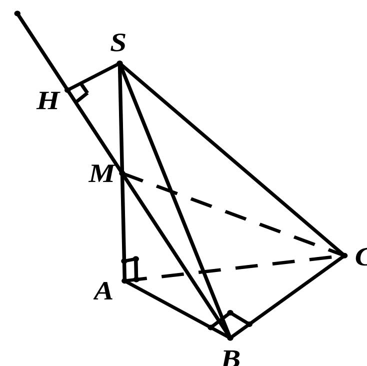
Tương tự F thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

Phần đảo.(bạn đọc tự giải)

Vậy tập hợp các điểm E và F là đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$ bỏ đi hai điểm S và H.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi M là một điểm trên cạnh SA. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên (MBC) khi M di động trên đoạn SA.

Lời giải.



Phần thuận.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $SH \perp MB, H \in MB$, khi đó ta có

$\begin{cases} SH \subset (SAB) \\ BC \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (MBC)$ Vậy H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (MBC).

Trong mặt phẳng (SAB) điểm H nhì đoạn SB dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn (C) đường kính SB nằm trong (SAB).

Giới hạn.

Khi $M \equiv S \Rightarrow H \equiv S$.

Khi $M \equiv A \Rightarrow H \equiv A$.

Vậy M di động trên đoạn SA thì H di động trên cung nhỏ SA của đường tròn (C).

Phần đảo.

Gọi H' là một điểm bất kì trên cung nhỏ SA của đường tròn (C), gọi $M' = BH' \cap SA$. Ta có

$\begin{cases} SH' \perp BM' \\ SH' \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH' \perp (M'BC)$ hay H' là hình chiếu của S trên (MBC).

Kết luận : Tập hợp các điểm H là cung nhỏ SA của đường tròn (C).

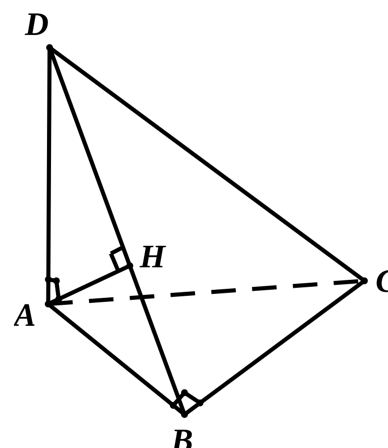
CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Câu 26. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA\perp(ABC)$

a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất. Chứng minh $BC\perp(SAB)$.

A. $BC\perp(SAB)$ **B.** $BC\perp(SAC)$

C. $\left(AD,BC\right)=45^0$ **D.** $\left(AD,BC\right)=80^0$



b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB, thì khẳng định nào sau đây đúng nhất. Chứng minh $AH\perp SC$.

A. $AH\perp AD$ **B.** $AH\perp SC$

C. $AH\perp(SAC)$ **D.** $AH\perp AC$

Bài làm: 26. a) Ta có $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp BC$.

Do đó $\left.\begin{matrix}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)$ Chọn A

b) Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$

Vậy $\left.\begin{matrix}AH\perp BC\\AH\perp SB\end{matrix}\right\}\Rightarrow AH\perp SC$ .Chọn B

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA=SC,SB=SD$.

a)Khẳng định nào sau đây là **sai**?.

A. $SO\perp(ABCD)$ **B.** $SO\perp AC$

C. $SO\perp BD$ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**?.

A. $AC\perp(SBD)$ **B.** $AC\perp SO$ **C.** $AC\perp SB$ **D.**Cả A, B, C đều sai

Bài làm: 27. a) Ta có O là trung điểm của AC và $SA=SC\Rightarrow SO\perp AC$.

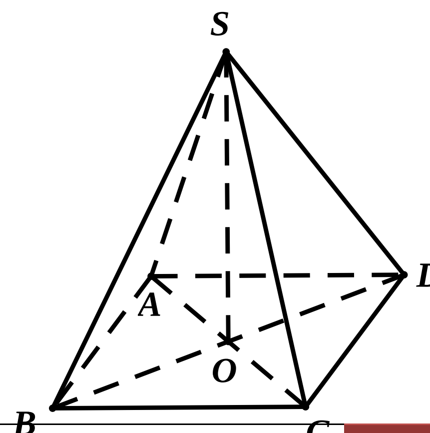
Tương tự $SO\perp BD$.

Vậy $\left.\begin{matrix}SO\perp AC\\SO\perp BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.Chọn D

b) Ta có $AC\perp BD$ (do $ABCD$ là hình thoi).

Lại có $AC\perp SO$ (do $SO\perp(ABCD)$)

Suy ra $AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp SD$.Chọn D



Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH\perp(ABC)$.

a) Khẳng định nào đúng nhất? H là trực tâm của ΔABC.

A. H là trực tâm của ΔABC.

B. H là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC.

C. H là trọng tâm của ΔABC.

D. H là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC.

b) ΔABC là tam giác gì?

A. ΔABC là tam giác nhọn.

B. ΔABC là tam giác tù

C. ΔABC là tam giác vuông

D. ΔABC là tam giác cân

c) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất? $S_{\Delta ABC}^2=S_{\Delta OAB}^2+S_{\Delta OBC}^2+S_{\Delta OCA}^2$

A. $S_{\Delta ABC}^2=\frac{1}{2}S_{\Delta OAB}^2+\frac{1}{2}S_{\Delta OBC}^2+\frac{1}{2}S_{\Delta OCA}^2$

B. $\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}^2=S_{\Delta OAB}^2+S_{\Delta OBC}^2+S_{\Delta OCA}^2$

C. $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}^2=S_{\Delta OAB}^2+S_{\Delta OBC}^2+S_{\Delta OCA}^2$

D. $S_{\Delta ABC}^2=S_{\Delta OAB}^2+S_{\Delta OBC}^2+S_{\Delta OCA}^2$

d) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2+MB^2+MC^2=3MO^2$.

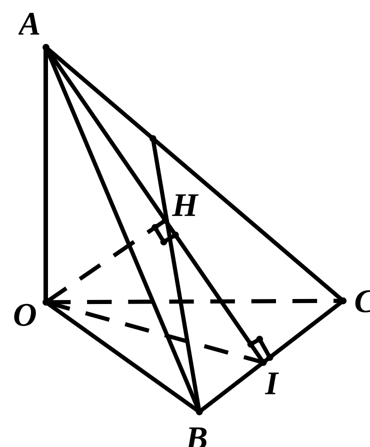
A. M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG, trong đó I là điểm cách đều 4 điểm O,A,B,C và G là trọng tâm của tam giác ABC

B. M thuộc mặt phẳng đi qua I và song song với OG ,trong đó I là điểm cách đều 4 điểm O,A,B,C và G là trọng tâm của tam giác ABC

C. M thuộc mặt phẳng đi qua O và vuông góc với OG, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC

D. M thuộc mặt phẳng đi qua O và song song với OG, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC

Bài làm: 28.



a) Ta có $\left.\begin{matrix} OA\perp OB \\ OA\perp OC \end{matrix}\right\}\Rightarrow OA\perp(OBC)\Rightarrow OA\perp BC$

Lại có $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp BC$

Vậy $\left.\begin{matrix} BC\perp OA \\ BC\perp OH \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(OAH)$

$\Rightarrow BC\perp AH$ (1).

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC \perp OB \\ AC \perp OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow BH \perp AC \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$

Ta có $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Tương tự $AC = \sqrt{a^2 + c^2}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{\left(a^2 + b^2\right) + (a^2 + c^2) - \left(b^2 + c^2\right)}{2\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)(a^2 + b^2)}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)(a^2 + b^2)}} > 0 \text{ suy ra } A \text{ nhọn.}$$

Tương tự các góc B, C nhọn.

c) Ta có $S^2_{ABC} = \frac{1}{4}AI^2BC^2 = \frac{1}{4}\left(OI^2 + OA^2\right)\left(OB^2 + OC^2\right)$

$$= \frac{1}{4}OI^2BC^2 + \frac{1}{4}OA^2OB^2 + \frac{1}{4}OA^2OC^2 = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$$

d) Gọi I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO})^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MI \perp OG \text{ (do } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}\text{)}$$

Vậy M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG.

Câu 29. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường thẳng AC và BF vuông góc với nhau. Gọi CH và FK lần lượt là đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng :

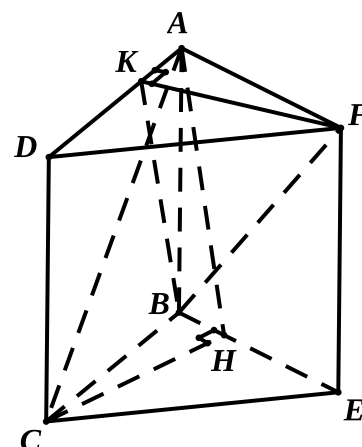
a) Khẳng định nào sau đây là đúng về 2 tam giác ΔACH và ΔBFK ?

A. ΔACH và ΔBFK là các tam giác vuông
B. ΔACH và ΔBFK là các tam giác tù
C. ΔACH và ΔBFK là các tam giác nhọn
D. ΔACH và ΔBFK là các tam giác cân

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $BF \perp AH$
B. $\left(BF, AH\right) = 45^0$
C. $AC \perp BK$
D. $AC \perp \left(BKF\right)$

Bài làm: 29.



a) Ta có $\left.\begin{matrix} AB\perp BC \\ AB\perp BE \end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp (BCE)$

$\Rightarrow AB\perp CH$.

Vậy $\left\{\begin{matrix} CH\perp AB \\ CH\perp BE \end{matrix}\right.\Rightarrow CH\perp (ABEF)$

$\Rightarrow CH\perp AH$, hay ΔACH vuông tại H.

Tương tự $\left.\begin{matrix} FK\perp AD \\ FK\perp AB \end{matrix}\right\}\Rightarrow FK\perp (ABCD)$

$\Rightarrow \Delta BFK$ vuông tại K.

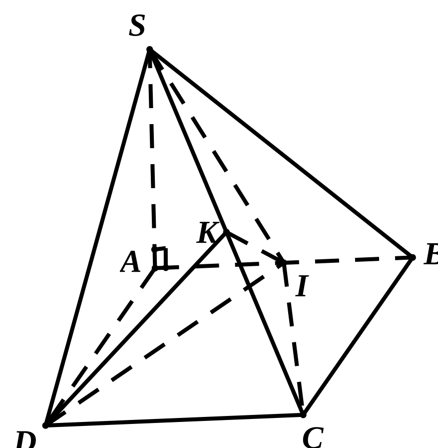
b) Ta có $CH\perp (ABEF)\Rightarrow CH\perp BF$, mặt khác $AC\perp BF\Rightarrow BF\perp (ACH)\Rightarrow BF\perp AH$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC\perp KF \\ AC\perp BF \end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp (BKF)\Rightarrow AC\perp BK$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp (ABCD)$ và $SA=a$. Gọi I,K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC. Tính IK.

A. $IK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $IK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $IK=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $IK=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$



Bài làm: 30. Ta có $IS=\sqrt{AI^2+AS^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ Tương tự $ID=IC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ suy ra

$IS=ID=IC$ nên I thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD.

Mặt khác $\left\{\begin{matrix} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{matrix}\right.\Rightarrow CD\perp (SAD)$

$\Rightarrow CD\perp SD\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D, lại có K là trung điểm của SC nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD, do đó $KI\perp (SCD)$.

Ta có $IK^2=ID^2-DK^2=ID^2-\frac{1}{4}SC^2=ID^2-\frac{1}{4}\left(SA^2+AC^2\right)$

$\frac{5a^2}{4}-\frac{1}{4}\left(a^2+2a^2\right)=\frac{a^2}{2}\Rightarrow IK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

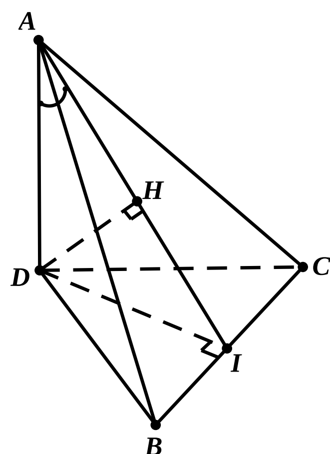
Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có DA,DB,DC đôi một vuông góc . Gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng DA,DB,DC với mặt phẳng (ABC).

Tìm Giá trị nhỏ nhất của $M=\left(2+\cot^2\alpha\right)\left(2+\cot^2\beta\right)\left(2+\cot^2\gamma\right)$.

A. 64 **B.**8 **C.** 1 **D.** $64\sqrt{2}$

Bài làm: 31. Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)

Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.



Và $\left(DA,(ABC)\right)=\left(DA,AH\right)=DAH=\alpha$

Đặt $DA=a,DB=b,DC=c$

Gọi $I=AH\cap BC$ thì DI là đường cao của tam giác DBC nên

$DI=\frac{DB.DC}{BC}=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

$\cot^2\alpha=\frac{DA}{DI}=\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{b^2c^2}\Rightarrow 2+\cot^2\alpha=2+\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{b^2c^2}\ge 2+\frac{2a^2}{bc}\ge\frac{4a}{\sqrt{bc}}$ Vậy $2+\cot^2\alpha\ge\frac{4a}{\sqrt{bc}}$ (1)

Tương tự $2+\cot^2\beta\ge\frac{4b}{\sqrt{ac}}$ (2) và $2+\cot^2\gamma\ge\frac{4c}{\sqrt{ab}}$ (3)

Nhân theo vế các BĐT $(1),(2),(3)$ ta được $\left(2+\cot^2\alpha\right)\left(2+\cot^2\beta\right)\left(2+\cot^2\gamma\right)\ge 64$ (đpcm)

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, Gọi H là trung điểm của AB và $SH\perp(ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

a) Khẳng định nào sau đây là sai?

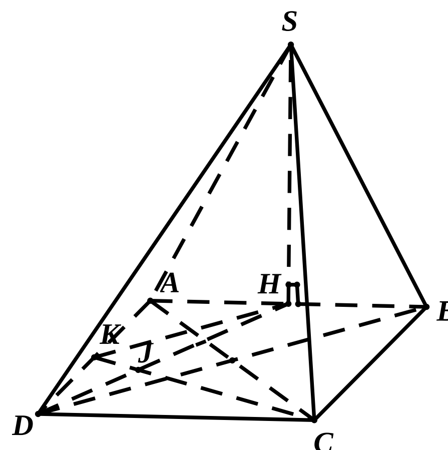
A. $AC\perp SH$ **B.** $AC\perp KH$ **C.** $AC\perp(SHK)$ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Khẳng định nào sau đây là sai?.

A. $CK\perp SD$ **B.** $DH\perp CK$

C. $DKC+ADH=90^0$ **D.** Cả A, B, C đều sai

Bài làm: 32.



a) Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$

lại có $\begin{cases} HK // BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$

$\Rightarrow AC \perp (SHK)$.

b) Dễ thấy $\Delta AHD = \Delta DKC \Rightarrow AHD = DKC$

mà $AHD + ADH = 90^0$

$\Rightarrow DKC + ADH = 90^0$ hay $DH \perp CK$, mặt khác ta có $SH \perp CK \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H,K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Khẳng định nào sau đây là đúng

a) AH,SK và BC đồng qui.

A. AH và BC chéo nhau **B.** AH và SK chéo nhau

C. AH,SK và BC đồng qui. **D.** AH,SK và BC không đồng qui.

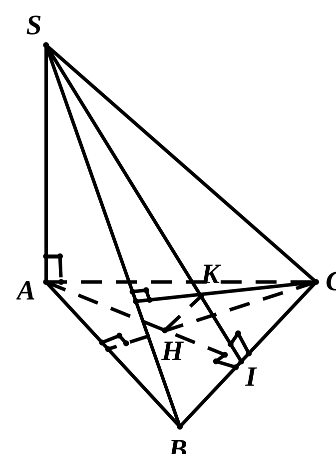
b) Khẳng định nào sau đây là sai?.

A. $SB \perp (CHK)$ **B.** $SB \perp HK$ **C.** $CH \perp (SAB)$ **D.** Cả A, B, C đều sai

c) $HK \perp (SBC)$.Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $HK \perp (SBC)$ **B.** $BC \perp (SAI)$ **C.** $BC \perp HK$ **D.** Cả A, B, C đều sai

✍Bài làm: 33.



a) Gọi $I = AH \cap BC$, để chứng minh AH,SK và BC đồng qui.

Ta cần chứng minh SI là đường cao của tam giác SBC, nhưng điều này đúng do $BC \perp SA$ và $BC \perp AI$.

b) Ta có $SB \perp CK$

thêm nữa ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB$

Vậy $SB \perp (CHK)$.

b) Theo các chứng minh trên ta có

$SB\perp(CHK)\Rightarrow SB\perp HK$ và $BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp HK$ do đó $HK\perp(SBC)$.

Câu 34. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn đường kính cố định BC và M là điểm di động trên đường tròn này. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại B lấy một điểm A.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông

B. các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông cân

C. tam giác ACM vuông tại A.

D. tam giác ACM vuông cân tại M.

b) Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B trên AM và AC. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $AC\perp(BHK)$. **B.** $BH\perp AC$ **C.** A, B đều đúng **D.**A, B đều sai

c) Tìm tập hợp điểm H khi M di động.

A. H thuộc đường tròn đường kính BK.

B. H thuộc đường tròn đường kính AC.

C. H thuộc đường tròn đường kính BM.

D. H thuộc đường tròn đường kính AB.

d) Tìm vị trí của M để đoạn AM lớn nhất.

A. $M\equiv C$ **B.** $M\equiv B$

C. $M\equiv H$ **D.** $M\equiv K$

e) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác BHK lớn nhất.

A. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $2\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

B. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\frac{1}{2}\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

C. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $3\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

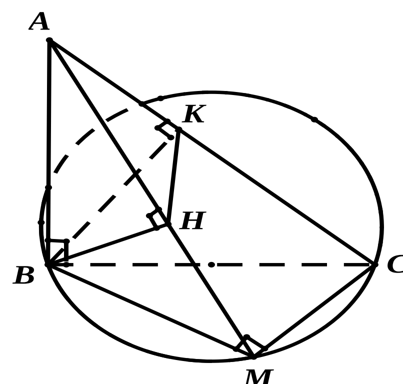
D. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Bài làm: 34.

a) Ta có $AB\perp(\alpha)\Rightarrow\begin{cases}AB\perp BM\\AB\perp BC\end{cases}$ suy ra các tam giác ABM và ABC vuông tại B.

Tiếp theo ta có $\begin{cases}MC\perp MB\\MC\perp AB\end{cases}\Rightarrow MC\perp(ABM)$

$\Rightarrow MC\perp AM$ hay tam giác ACM vuông tại M.



b) Ta có $\begin{cases}BH\perp AM\\BH\perp MC\end{cases}\Rightarrow BH\perp(ACM)$

$\Rightarrow BH\perp AC$.

Vậy $\left.\begin{matrix}AC\perp BH\\AC\perp BK\end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp(BHK)$.

c) Dễ thấy BK cố định và $BHK=90^0$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính BK.Từ đó ta có tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BK.

d) $MA^2=AB^2+BM^2$ mà AB không đổi nên AM lớn nhất khi MB lớn nhất $\Leftrightarrow BM=BC\Leftrightarrow M\equiv C$.

e) Ta có $S_{BHK}=\frac{1}{2}BH.HK\le\frac{BH^2+HK^2}{4}=\frac{BK^2}{4}$ không đổi nên

$\max S_{BHK}=\frac{BK^2}{4}\Leftrightarrow BH=HK$, lúc này ΔHBK vuông cân tại H nên $BH=\frac{BK}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BM^2};\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}$

nên $2\left(\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BC^2}\right)=\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BA^2}\Leftrightarrow\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{2}{BC^2}$

$\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Vậy $\max S_{BHK}=\frac{BK^2}{4}\Leftrightarrow\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}\Leftrightarrow$ M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) Khẳng định nào sau đây là sai?.

A. $SH \perp (ABCD)$ **B.** $SH \perp HC$ **C.** A, B đều đúng **D.** A, B là sai

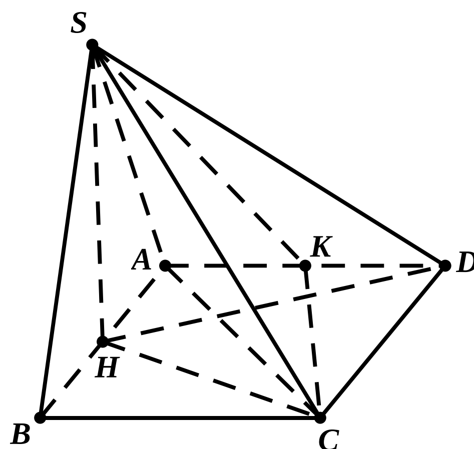
b) Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $CK \perp HD$ **B.** $CK \perp SD$

C. $AC \perp SK$ **D.** Cả A, B, C đều sai

Bài làm: 35.

a) Vì H là trung điểm của AB và tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$



Lại có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SC = a\sqrt{2}, HC = \sqrt{DH^2 + DC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $HC^2 + HS^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = 2a^2 = SC^2$

$\Rightarrow \Delta HSC$ vuông tại $H \Rightarrow SH \perp HC$

Vậy $\begin{cases} SH \perp HC \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC \perp HK$ và $AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SHK)$

$\Rightarrow AC \perp SK$.

Tương tự $CK \perp HD$ (như bài 32) và $CK \perp SH \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC là tam giác vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D và $SD = a\sqrt{5}$.

a) Tính SA.

A. $SA = a$ **B.** $SA = 2a$ **C.** $SA = 3a$ **D.** $SA = 4a$

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Gọi K, L là các giao điểm K, L của SB, SD với (HIJ).

Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

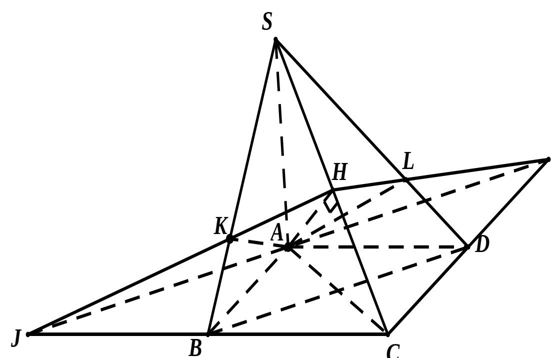
A. $AK \perp (SBC)$, **B.** $AL \perp (SCD)$ **C.** $AK \perp SC$ **D.** Cả A, B, C đều đúng

Bài làm: 36.

a) ΔSBC vuông tại $B \Rightarrow BC \perp SB$ mà $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SA$.

Tương tự ta có $SA \perp CD$ nên $SA \perp (ABCD)$.



Ta có

$SC = \sqrt{DS^2 + DC^2} = a\sqrt{6}$

$\Rightarrow SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Vậy $SA = a$.

b) Do $\begin{cases} IJ \perp AC \\ IJ \perp SA \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SAC) \Rightarrow IJ \perp SC$

Lại có $AH \perp SC \Rightarrow (HIJ) \perp SC \Rightarrow AK \perp SC \quad (1)$

Dế thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $AK \perp (SBC)$.

Lập luận tương tự ta có $AL \perp (SCD)$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM = x$ $(0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB

Giả sử thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với (α) là tứ giác $MNPQ$.

a) Hỏi tứ giác $MNPQ$ là hình gì

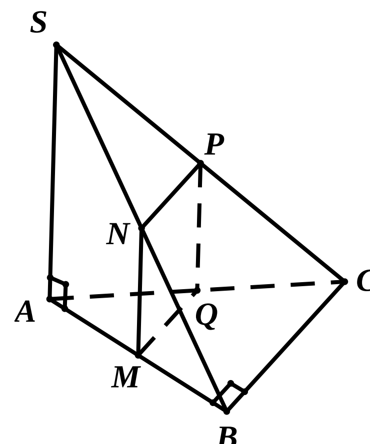
A. Hình chữ nhật **B.** hình vuông **C.**hình thang **D.** hình bình hành

b) Tìm x để diện tích thiết diện $MNPQ$ lớn nhất.

A. $x = \frac{a}{2}$ **B.** $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** $x = \frac{3a}{2}$ **D.** $x = a$

✍**Bài làm:37**. Ta có $\begin{cases} (\alpha) \perp AB \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, (\alpha)$

Do đó $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ SA \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN \,//\, SA$ Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \,//\, (\alpha)$



$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ BC \subset (ABC) \\ BC // (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ // BC, Q \in AC$

$\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ BC // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP // BC, P \in SC.$

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $MN // SA, PQ // SA \Rightarrow MN // PQ$ và

$MQ // BC, NP // BC \Rightarrow MQ // NP$ nên $MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $\begin{cases} MN // SA \\ NP // BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$. Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b) Ta có $MQ = AM = x$, $\frac{MN}{SA} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \frac{MB.SA}{AB} = \frac{(a-x)a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}(a-x)$

$S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{3}(a-x)x = \sqrt{3}[\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2] \le \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\max S_{MNPQ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ khi $x = \frac{a}{2}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Giả sử tồn tại tiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện.

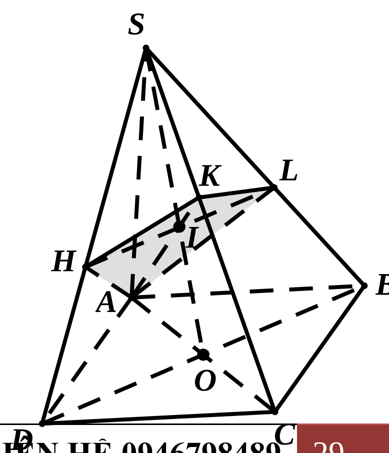
A. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $S = \frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$

✍**Bài làm: 38**. Gọi K là hình chiếu của A trên SC thì $K \in (\alpha)$.Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AK$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC$, mặt khác $(\alpha) \perp SC$ nên $BD // (\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SBD) \\ BD \subset (SBD) \\ BD // (\alpha) \end{cases}$



$\Rightarrow(\alpha)\cap(SBD)=HL\,//\,BD, H\in SD, L\in SB$

Thiết diện là tứ giác $AHKL$.

b) Do $\begin{cases} HL\,//\,BD \\ BD\perp AK \end{cases}\Rightarrow HL\perp AK\Rightarrow S_{AHKL}=\frac{1}{2}AH.KL$

Ta có $SA=AC=a\sqrt{2}\Rightarrow\Delta SAC$ cân tại A, mà $AK\perp SC$ nên K là trung điểm của $SC\Rightarrow AK=\frac{SC}{2}=\frac{2a}{2}=a$.

$HL\,//\,BD\Rightarrow\frac{HL}{BD}=\frac{SH}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow HL=\frac{2}{3}BD=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

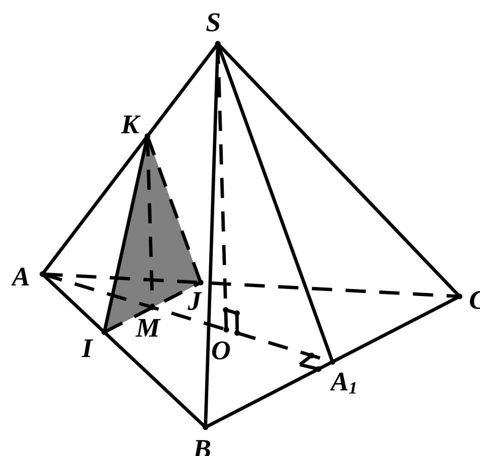
Vậy $S_{AHKL}=\frac{1}{2}a.\frac{2a\sqrt{2}}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA' của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM=x$. Giả sử tồn tại thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

Giả sử tính được diện tích thiết diện theo a và x. Xác định vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.

A. $x=\frac{a\sqrt{3}}{8}$ **B.** $x=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $x=\frac{3a}{8}$ **D.** $x=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$

Bài làm: 39. Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$ (O là tâm tam giác ABC).Do đó $SO\perp AA_1$ mà $(\alpha)\,//\,AA_1\Rightarrow SO\,//\,(\alpha)$.



Tương tự ta cũng có $BC\,//\,(\alpha)$

Trường hợp 1. $x=0$ thì thiết diện là điểm A.

Trường hợp 2. $0<x\le\frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì M thuộc đoạn $AO(M\ne A)$.

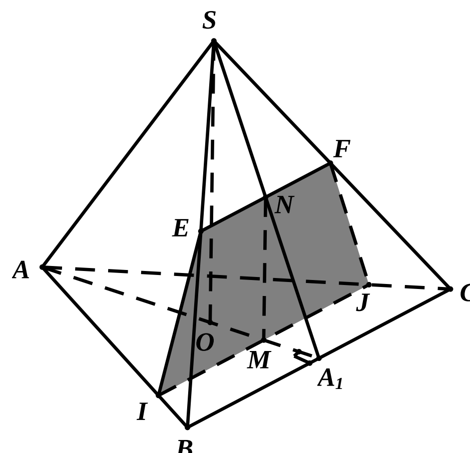
Ta có :

$\begin{cases} M\in(ABC)\cap(\alpha) \\ BC\subset(ABC) \\ BC\,//\,(\alpha) \end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=IJ\,//\,BC, I\in AB, J\in AC$

Tương tự $\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(SAA_1) \\ SO\subset(SAA_1) \\ SO\,//\,(\alpha) \end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SAA_1)=MK\,//\,SO, K\in SA$.

Thiết diện là tam giác KIJ.

Trường hợp 3. $\frac{a\sqrt{3}}{3}<x<\frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi đó M thuộc đoạn $OA\left(M\ne 0;M\ne A\right)$



Tương tự như trường hợp trên ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\in \left(ABC\right)\cap \left(\alpha \right) \\ BC\subset \left(ABC\right) \\ BC//\left(\alpha \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left(\alpha \right)\cap \left(ABC\right)=IJ//BC, \\ I\in AB,J\in AC.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M\in \left(\alpha \right)\cap \left(SAA_1\right) \\ SO\subset \left(SAA_1\right) \\ SO//\left(\alpha \right) \end{array} \right.\Rightarrow \left(\alpha \right)\cap \left(SAA_1\right)=MN//SO,N\in SA_1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N\in \left(\alpha \right)\cap \left(SBC\right) \\ BC\subset \left(SBC\right) \\ BC//\left(\alpha \right) \end{array} \right.\Rightarrow \left(\alpha \right)\cap \left(SBC\right)=EF//IJ,N\in EF$$

Thiết diện là tứ giác $IJEF$.

Trường hợp 4. $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì thiết diện là đoạn BC.

b) Xét các trường hợp:

$x=0\Rightarrow S_{td}=0$, $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_{td}=0$

$0<x\le \frac{a\sqrt{3}}{3}$, thì $S_{IJK}=\frac{1}{2}IJ.MK$.

Ta có $IJ//BC\Rightarrow \frac{IJ}{BC}=\frac{AM}{AA_1}=\frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow IJ=\frac{2x\sqrt{3}}{3}$

Tương tự $\frac{MK}{SO}=\frac{AM}{AO}=\frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}\Rightarrow MK=2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{IJK}=\frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3}=2x^2$.

$\frac{a\sqrt{3}}{3}<x<\frac{a\sqrt{2}}{3}$, dễ thấy $IJEF$ là hình thang nên $S_{IJEF}=\frac{1}{2}\left(IJ+EF\right)MN$

$IJ=\frac{2x\sqrt{3}}{3}$, $\frac{EF}{BC}=\frac{SN}{SA_1}=\frac{OM}{OA_1}=\frac{x-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}\Rightarrow EF=2\left(x\sqrt{3}-a\right)$

$\frac{MN}{SO}=\frac{MA_1}{OA_1}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}\Rightarrow MN=2\left(3a-2x\sqrt{3}\right)$

Vậy $S_{IJEF}=\frac{2}{3}\left(4x\sqrt{3}-3a\right)\left(3a-2x\sqrt{3}\right)$.

Xét các trường hợp ta thấy S_{td} lớn nhất trong trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3}<x<\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\max S_{IJEF}=\frac{3a^2}{4}$ khi $x=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Câu 40. Cho tam giác ABC tại C có cạnh huyền nằm trên mặt phẳng (P) và các cạnh góc vuông tạo với (P) các góc α,β. Giả sử ∂ là độ lớn góc giữa đường cao CK với (P).Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. $\sin\partial=\sqrt{2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta}$ **B.** $\sin\partial=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$

C. $\sin\partial=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ **D.** $\sin\partial=2\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$

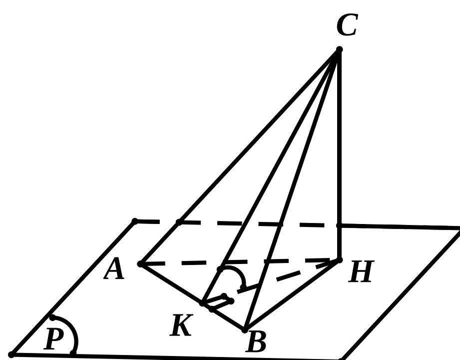
Bài làm: 40. Kẻ $CH\perp(P)$ thì CKH là góc giữa CK và (P) và dễ thấy

$\left(CA,(P)\right)=CAH=\alpha,\left(CB,(P)\right)=CBH=\beta$

Đặt $CH=h$, ta có $CA=\frac{h}{\sin\alpha},CB=\frac{h}{\sin\beta}$

$AB^2=CA^2+CB^2=\frac{h^2}{\sin^2\alpha}+\frac{h^2}{\sin^2\beta}$

$=h^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\right)$.



Xét tam giác ABC có $CK.AB=CA.CB$

$$\Rightarrow CK=\frac{CA.CB}{AB}=\frac{\frac{h}{\sin\alpha}.\frac{h}{\sin\beta}}{\sqrt{\frac{1}{h^2}\left(\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right)}}$$

$$=\frac{h}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}.$$

Ta có $\sin CKH=\frac{CH}{CK}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $SO\perp(ABCD)$, đường thẳng SA tạo với hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBC) các góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC).

a)Tính SA khi $HB=\frac{a}{2}$

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Tính góc giữa đường thẳng SA với $(ABCD)$.

A. $\phi=\arctan\sqrt{\frac{3}{5}}$ **B.** $\phi=\arctan\sqrt{\frac{3}{7}}$

C. $\phi=\arctan\sqrt{\frac{3}{8}}$ **D.** $\phi=\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$

✍Bài làm: 41.

a) Dễ thấy $(SA,(ABCD))=SAO=\phi$ nên $SO=SA\cos\phi$ (1).

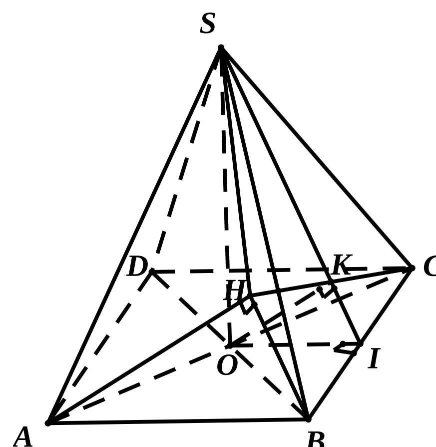
Gọi I là trung điểm của BC thì ta có $\begin{cases}OI\perp BC\\SO\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SIO)$

Kẻ $OK\perp SI$ thì $OK\perp BC$ nên $OK\perp(SBC)$.

Kẻ $At\,//\,OK$ cắt CK tại H, khi đó ta có

$\begin{cases}AH\,//\,CK\\CK\perp(SBC)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)$ nên $(SA,(SBC))=SAH=\phi$ do đó

$AH=SA\cos\phi$ (2).



Từ $(1),(2)$ ta có $AH = SO$.

Khi $BH = \frac{a}{2}$ thì trong tam giác vuông HAB có $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow SO = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

b) $\tan\phi = \frac{SO}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \phi = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$. Góc giữa đường thẳng SC với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) lần lượt là α và β.

a) Tính SA

A. $SA = a\sin\alpha$

B. $SA == a\cos\alpha$

C. $SA = a\tan\alpha$

D. $SA = 2a\sin\alpha$

b) Tính AB

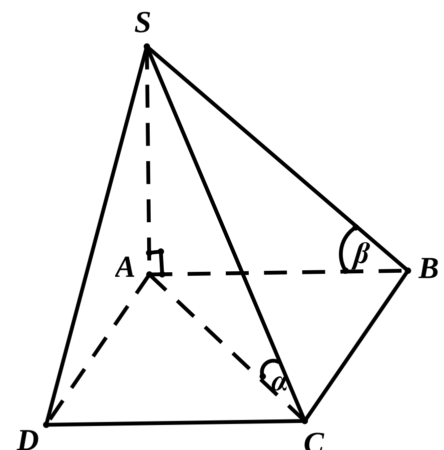
A. $\frac{1}{2}a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

B. $2a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

C. $3a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

D. $a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

Bài làm: 42.



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD))$

$= SAC = \alpha.$

Tương tự $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SC,(SAB)) = SBC = \beta$.

$SA = SC\sin\alpha = a\sin\alpha$

b) $SB = SC\sin\beta = a\sin\beta$

$$AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = \sqrt{a^2\sin^2\beta - a^2\sin^2\alpha} = a\sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$
$$= a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

.

Câu 43. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc . Gọi H là trực tâm của tứ diện . Gọi A,B,C là ba góc tương ứng của tam giác ABC.

Đặt $\alpha = AOH, \beta = BOH, \gamma = COH$. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin C}$

B. $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2 2\gamma}{\sin 2C}$

C. $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin^2 2\gamma}{\sin C}$

D. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$

Bài làm: 43. (HS tự giải)

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có $BDC = 90^0$. Hình chiếu H của D trên mặt phẳng ABC là trực tâm tam giác ABC.

a) Tính CDA.

A. $CDA = 60^0$ **B.** $CDA = 90^0$ **C.** $CDA = 45^0$ **D.** $CDA = 30^0$

b)Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

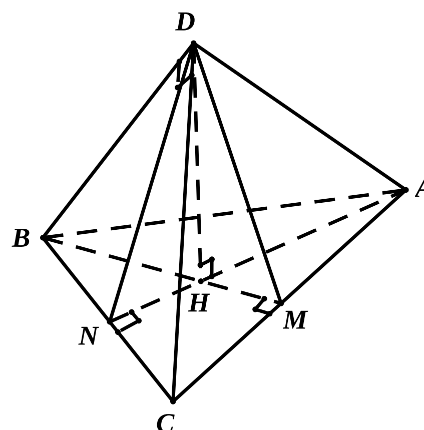
A. $6\left(DA^2 + DB^2 + DC^2\right) \ge \left(AB + BC + CA\right)^2$

B. $6\left(DA^2 + DB^2 + DC^2\right) \ge 5\left(AB + BC + CA\right)^2$

C. $3\left(DA^2 + DB^2 + DC^2\right) \ge \left(AB + BC + CA\right)^2$

D. $2\left(DA^2 + DB^2 + DC^2\right) \ge 3\left(AB + BC + CA\right)^2$

Bài làm:44.



a) Vì $\begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH)$

$\Rightarrow BC \perp DA \quad (1)$

Tương tự ta có $(BDH) \perp AC \Rightarrow DB \perp AC$, vì vậy

$\begin{cases} DB \perp DC \\ DB \perp AC \end{cases} \Rightarrow DB \perp (ACD)$

$\Rightarrow DB \perp DA \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $DA \perp (BCD) \Rightarrow DA \perp DC$ ha $CDA = 90^0$.

b) Từ câu a) ta thấy tứ diện $ABCD$ có các cạnh DA, DB, DC đôi một vuông góc.

Theo BĐT Cauchy-Schwraz ta có

$\left(AB+BC+CA\right)^2 \le 3\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

Mà $\begin{cases} AB^2=DA^2+DB^2 \\ BC^2=DB^2+DC^2 \\ CA^2=DA^2+DC^2 \end{cases}$ nên $\left(AB+BC+CA\right)^2 \le 6\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi $AB=BC=CA \Rightarrow \Delta ABC$ đều, kết hợp với chân đường cao của D trùng với tâm đáy ta được $D.ABC$ là hình chóp đều đỉnh D.

Câu 45. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc. M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{MA^2}{OA^2}+\dfrac{MB^2}{OB^2}+\dfrac{MC^2}{OC^2}$.

A. $\min T=3$ **B.** $\min T=2$ **C.** $\min T=4$ **D.** $\min T=6$

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC và α,β,γ lần lượt là góc gữa đường thẳng OH với các đường thẳng OA,OB,OC. Tìm giá trị lớn nhất của $A=\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$

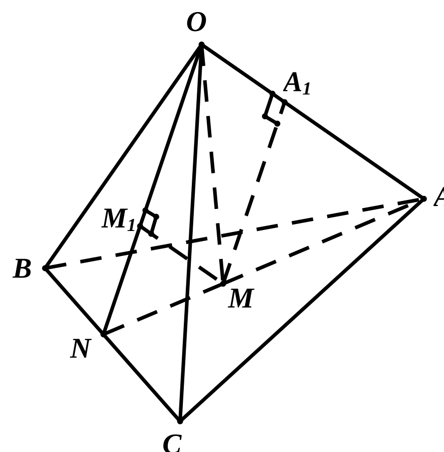
A. $\max A=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\max A=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\max A=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\max A=2$

c) Tìm GTNN của $S=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos^2\gamma}+\dfrac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\cos^2\beta}$

A. $\min S=6\sqrt{3}$ **B.** $\min S=\sqrt{3}$ **C.** $\min S=6$ **D.** $\min S=4$

✍Bài làm: 45.

a) Gọi $N=AM\cap BC$, kẻ $MM_1 \parallel OA$ thì ta có



$\begin{cases} OA\perp(OBC) \\ MM_1 \parallel OA \end{cases} \Rightarrow MM_1\perp(OBC)$

kẻ $MA_1\perp OA, A_1\in OA$. Khi đó

$AM^2=AA_1^2+MA_1^2=AA_1^2+MO^2-OA_1^2$

$=OM^2+\left(AA_1-OA_1\right)\left(AA_1+OA_1\right)$

$=OM^2+OA\left(OA-2OA_1\right)$

$=OM^2+OA^2-2OA.OA_1$

Suy ra $\dfrac{AM^2}{OA^2}=\dfrac{OM^2}{OA^2}+1-\dfrac{2OA_1}{OA}$ (1).

Tương tự gọi B_1, C_1 là các điểm tương tự như A_1 thì ta có

$$\frac{MB^2}{OB^2}=\frac{OM^2}{OB^2}+1-\frac{2OB_1}{OB}\ (2)$$

$$\frac{MC^2}{OC^2}=\frac{OM^2}{OC^2}+1-\frac{2OC_1}{OC}\ (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $T=OM^2\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\right)-2\left(\frac{OA_1}{OA}+\frac{OB_1}{OB}+\frac{OC_1}{OC}\right)+3$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta đã biết kết quả quen thuộc

$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}$ nên $T=\frac{OM^2}{OH^2}-2\left(\frac{OA_1}{OA}+\frac{OB_1}{OB}+\frac{OC_1}{OC}\right)+3$

Mặt khác $\frac{OA_1}{OA}=\frac{NM}{NA}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự $\frac{OB_1}{OB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}},\frac{OC_1}{OC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ nên $\frac{OA_1}{OA}+\frac{OB_1}{OB}+\frac{OC_1}{OC}=1$

Do đó $T=\frac{OM^2}{OH^2}+1\geq 2$ do $OM\geq OH$.

Vậy $\min T=2$ khi $M\equiv H$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Do A,B,C,M đồng phẳng nên tồn tại x,y,z sao cho $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ $(x+y+z=1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(x-1)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, bình phương vô hướng ta được

$$AM^2=(x-1)^2a^2+y^2b^2+z^2c^2\Rightarrow\frac{MA^2}{OA^2}=(x-1)^2+\frac{y^2b^2}{a^2}+\frac{z^2c^2}{a^2}.$$

Tương tự $\frac{MB^2}{OB^2}=\frac{x^2a^2}{b^2}+(y-1)^2+\frac{z^2c^2}{b^2},\frac{MC^2}{OC^2}=\frac{x^2a^2}{c^2}+\frac{y^2b^2}{c^2}+(z-1)^2$

Vì vậy $T=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)+1$

$\geq\left(\frac{1}{a}.ax+\frac{1}{b}.by+\frac{1}{c}.cz\right)^2+1=2$ (Theo Cauchy-Schwarz)

Vậy $\min T=2$.

b) Dễ thấy $\alpha=AOH,\beta=BOH,\gamma=COH$.

Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}\Leftrightarrow\left(\frac{OH}{OA}\right)^2+\left(\frac{OH}{OB}\right)^2+\left(\frac{OH}{OC}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ (1)$.

Lại có $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \quad (*)$

Áp dụng CT (*) cho x nhận các giá trị α, β, γ và kết hợp với (1) thu được

$\dfrac{\cot^2\alpha}{1 + \cot^2\alpha} + \dfrac{\cot^2\beta}{1 + \cot^2\beta} + \dfrac{\cot^2\gamma}{1 + \cot^2\gamma} = 1$.

Đặt $x = \cot^2\alpha, y = \cot^2\beta, z = \cot^2\gamma \ (x, y, z > 0)$ thì bài toán trở thành

Cho $x, y, z > 0$ thỏa $\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y} + \dfrac{z}{1+z} = 1$. Chứng minh $xyz \le \dfrac{1}{8}$.

Ta có $\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y} + \dfrac{z}{1+z} = 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1+y} + \dfrac{z}{1+z} \ge 2\sqrt{\dfrac{yz}{(1+y)(1+z)}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x} \ge 2\sqrt{\dfrac{yz}{(1+y)(1+z)}} \ (2)$.

Tương tự ta có :

$\dfrac{1}{1+y} \ge 2\sqrt{\dfrac{xz}{(1+x)(1+z)}} (3)$ và $\dfrac{1}{1+z} \ge 2\sqrt{\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)}} \quad (4)$

Nhân theo từng vế các BĐT $(2),(3)(4)$ ta được $xyz \le \dfrac{1}{8} \ (\text{dpcm})$.

c) Tương tự như câu b) ta có $\min S = 6\sqrt{3}$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG III. VECTO-QUAN HỆ VUÔNG GÓC

TẬP 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC – KHOẢNG CÁCH

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489 hoặc

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Website: http://tailieutoanhoc.vn/

Email: baovuong7279@gmail.com hoặc tailieutoanhoc7279@gmail.com

MỤC LỤC

TÀI LIỆU CÓ THAM KHẢO TỪ SÁCH CỦA "NGUYỄN PHÚ KHÁNH"

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Góc giữa hai mặt phẳng.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt với hai mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \left((P),(Q)\right) = (a,b)$$

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^0.

Diện tích hình chiếu $S' = S\cos\phi$

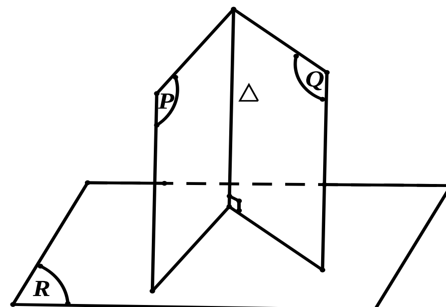
Trong đó S là diện tích đa giác nằm trong (P), S' là diện tích đa giác nằm trong (Q) còn ϕ là góc giữa (P) và (Q).

2. Hai mặt phẳng vuông góc.

2.1. Định nghĩa.

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \left((P),(Q)\right) = 90^0$.



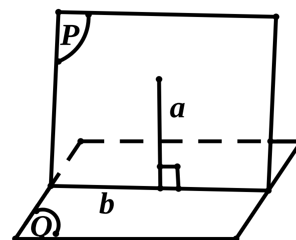
2.2. Tính chất.

- Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng và vuông góc với giao tyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$



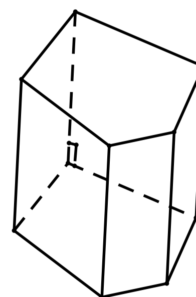
- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P).

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$

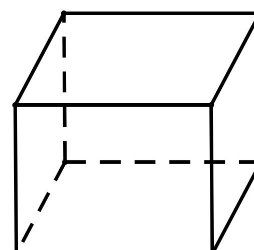
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng đó

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R)$$

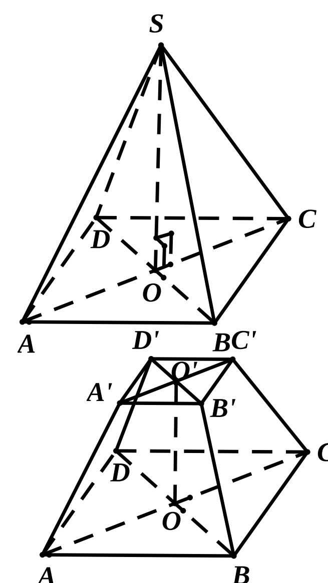
3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật.



- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.
- Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên vuông góc với hai đáy
- Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là lăng trụ đều
- 2. Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật
- Đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với a, b, c là ba kích thước.
- 3. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có đáy và các mặt bên đều là hình vuông.



4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều.



- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp được gọi là hình chóp cụt đều.
- Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đồng dạng.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1. Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right) = (a,b).$$

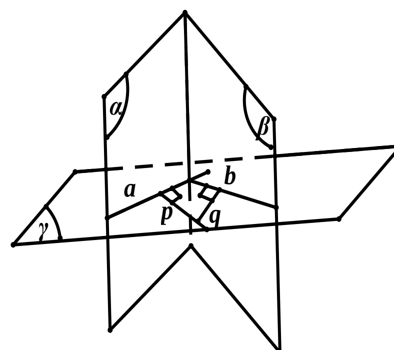
Cách 2. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ có giá lần lượt vuông góc với (α) và (β) khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) xác định bởi $\cos\phi = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Cách 3. Sử dụng công thức hình chiếu $S' = S\cos\phi$, từ đó để tính $\cos\phi$ thì ta cần tính S và S'.

Cách 4. Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính. Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai cách sau:

a)

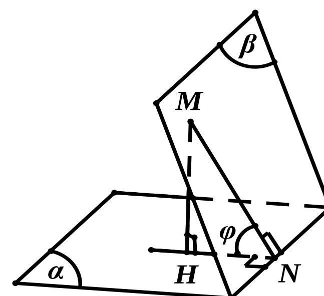
- Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$
- Chọn mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$
- Tìm các giao tuyến $a = (\gamma) \cap (\alpha), b = (\gamma) \cap (\beta)$
- $\left((\alpha),(\beta)\right) = (a,b)$



b)

- Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$
- Lấy $M \in (\beta)$.Dựng hình chiếu H của M trên (α)
- Dựng $HN \perp \Delta \Rightarrow MN \perp \Delta$.

Phương pháp này có nghĩa là tìm hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ và vuông góc với giao tuyến Δ tại một điểm trên giao tuyến.

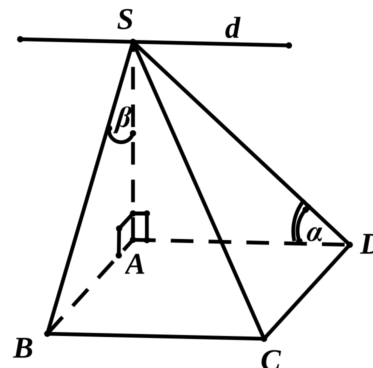


Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).



Lời giải.

a) Ta có $(SCD) \cap (ABCD) = CD$

$$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAD)$$

$(SAD) \cap (ABCD) = AD, (SAD) \cap (SCD) = SD$

$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (DA, SD) = SDA = \phi$

$$\tan\phi = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = 30^0$$

b) Ta có $\begin{cases} AD \cap (SAD) \\ BC \cap (SBC) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d // AD // BC$.

Vì $\begin{cases} SA \perp d \\ d // AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp d$, $\begin{cases} d // AD \\ AD \perp AD \end{cases} \Rightarrow d \perp AB$ nên $(SAB) \perp d$

$(SAB) \cap (SBC) = SB, (SAB) \cap (SAD) = SA$ suy ra ASB chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Tam giác ASB vuông cân tại A nên $ASB = 45^0$.

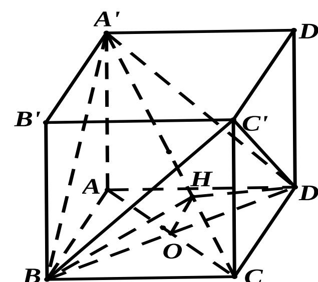
Ví dụ 2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

Lời giải.

Cách 1.

Ta có $(A'BC) \cap (A'CD) = A'C$. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD và H là hình chiếu vuông góc của O trên A'C.

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp A'C$



Vậy $\begin{cases} A'C \perp OH \\ A'C \perp BD \end{cases} \Rightarrow A'C \perp (BDH)$.

$(BDH) \cap (A'CD) = HD, (BDH) \cap (A'BC) = BH$

$\Rightarrow ((A'BC),(A'BD)) = (HB,HD)$.

Tam giác BCA' vuông tại B có đường cao BH, do đó

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA'^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tương tự $DH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Áp dụng định lí côsin cho ΔHBD ta có $\cos BHD = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB.HD} = \frac{\frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2a^2}{2.\frac{2a^2}{3}} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow BHD = 120^0$. Vậy $((A'BC),(A'BD)) = (HB,HD) = 60^0$.

Cách 2. Gọi $H = A'C \cap (BDC')$, do mặt chéo (BDC') ứng với đường chéo $A'C$ nên $(BDC') \perp A'C$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng HB, HD chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

Do $CB = CD = CC' \Rightarrow HB = HD = HC'$ và $BD = BC' = DC' = a\sqrt{2}$ suy ra H la tâm của tam giác đều $C'BD \Rightarrow BHD = 120^0$.

Vậy $((A'BC),(A'BD)) = (HB,HD) = 60^0$.

Cách 3: Do $\begin{cases} AB' \perp A'B \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp (A'BC)$

Tương tự $AD' \perp (A'CD)$ nên $((A'BC),(A'BD)) = (AB',AD') = 60^0$

(vì $\Delta AB'D'$ đều).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = b, AC = c, AD = d$ đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng $(ACD),(ABD),(ABC)$.

a)Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

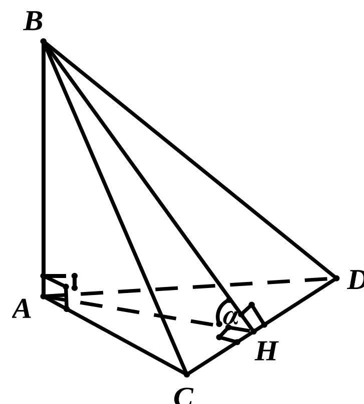
b) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha = 30^0, \beta = 45^0, \gamma = 60^0$

Lời giải.

a) *Cách 1.*

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, do

$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.



Vậy $(ABH) \perp CD$ và CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) nên $\alpha = AHB$.

Ta có

$\tan\alpha = \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{b}{AH}$, mà $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}$ nên

$\tan\alpha = \dfrac{b\sqrt{c^2+d^2}}{cd}$.

Mặt khác $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{c^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$.

Tương tự ta có :

$\cos^2\beta = \dfrac{b^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$, $\cos^2\gamma = \dfrac{b^2c^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

***Cách* 2.** Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) và I là trung điểm của CD. Đặt

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} \Rightarrow |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, |\vec{d}| = d$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AH} \perp (BCD)$ và $\begin{cases} BH.BI = BA^2 = b^2 \\ IH.IB = IA^2 = \dfrac{c^2d^2}{c^2+d^2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{BH}{IH} = \dfrac{b^2(c^2+d^2)}{c^2d^2} = k$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AI}$, mà $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{AC^2}{AD^2} = \dfrac{c^2}{d^2} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{CD}$ nên

$$\overrightarrow{AH} = \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\overrightarrow{AB} + \frac{b^2c^2+d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\left(\frac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{b} + \frac{d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{c} + \frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{d}$$

Lại có $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vec tơ vuông góc với các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ACB)$. Từ đó ta có:

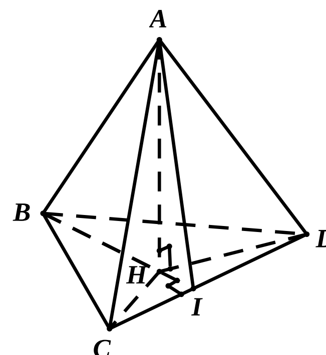
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{b}.\overrightarrow{AH}|}{|\vec{b}||\overrightarrow{AH}|} = \frac{\dfrac{b^2c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}{b\sqrt{\dfrac{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}{b^2c^2d^2}}} = \frac{cd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Tương tự : $\cos\beta = \frac{\left|\vec{c}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|} = \frac{bd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}, \cos\gamma = \frac{\left|\vec{d}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|} = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$

Suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

b) Sử dụng công thức hình chiếu

Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD).



Trước tiên ta chứng minh tam giác BCD nhọn. Không giảm tổng quát, giả sử B lớn nhất.

Ta có $CD^2 = AC^2 + AD^2 = c^2 + d^2$

Tương tự $CB^2 = b^2 + c^2, DB^2 = b^2 + d^2$

Áp dụng định lí côsin cho ΔBCD ta có

$$\cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC.BD}$$

$$= \frac{\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2+d^2\right)-\left(c^2+d^2\right)}{2\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)}}$$

$= \frac{2b^2}{2\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)}} > 0$ do đó B nhọn, hay tam giác BCD nhọn.

Ta có $\begin{cases} AH \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow BH \perp CD$, tương tự ta có $CH \perp BD$ từ đó suy ra H là trực tâm của ΔBCD, mà ΔBCD nhọn nên H thuộc miền trong tam giác BCD. Do đó

$S_{BCD} = S_{HBC} + S_{HBD} + S_{HCD} = S_{ABC}\cos\gamma + S_{ABD}\cos\beta + S_{ACD}\cos\alpha$

$= \frac{1}{2}bc\cos 60^0 + \frac{1}{2}bd\cos 45^0 + \frac{1}{2}cd\cos 30^0 = \frac{bc + \sqrt{2}bd + \sqrt{3}cd}{4}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải.

a) Gọi $I = AD \cap BC$ thì $SI = (SAD) \cap (SBC)$. $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$. Dựng $DE \perp SI, E \in SI$ khi đó $(BDE) \perp SI$. Do đó BED là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

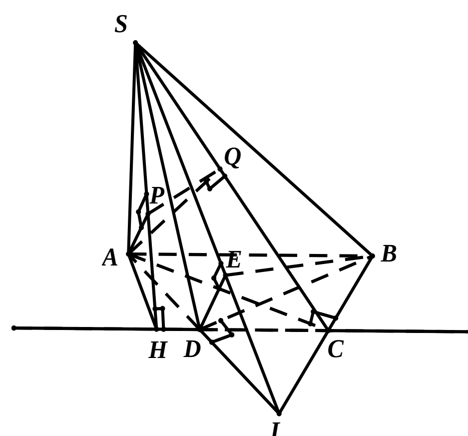
Do đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $IAB = IBA = 60^0 \Rightarrow \Delta IBA$ đều.

Vì vậy $AI = AB = 2a$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(2a\right)^2} = a\sqrt{7}$.

Dễ thấy $\Delta SAI \sim \Delta DEI \Rightarrow \frac{DE}{SA} = \frac{DI}{SI} = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \frac{SA}{\sqrt{7}} = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp DE$. Trong tam giác vuông BDE ta có

$\tan BED = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\frac{3}{7}}} = \sqrt{7} \Rightarrow BED = \arctan\sqrt{7}$.



Vậy $\left((SAD),(SBC)\right) = \arctan\sqrt{7}$

b) Dựng $AP \perp SH, P \in SH$.

Do $CD \perp (SAH) \Rightarrow AP \perp CD \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Tương tự, dựng $AQ \perp SC, Q \in SC$ thì $AQ \perp (SBC)$.

Do đó $PAQ = \left((SBC),(SCD)\right)$.

Trong tam giác SAH ta có :

$$\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AP = a\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Dễ thấy ΔSAC vuông cân tại A nên $AQ = \frac{1}{2}SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PQ$.

Trong ΔAPQ có $\cos APQ = \frac{AP}{AQ} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow APQ = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$

Vậy $\left((SBC),(SCD)\right) = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.

Phương pháp:

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng , rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0 .

$\left((\alpha),(\beta)\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

Cách 3. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ lần lượt vuông góc với các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ rồi chứng minh $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$.

Các ví dụ

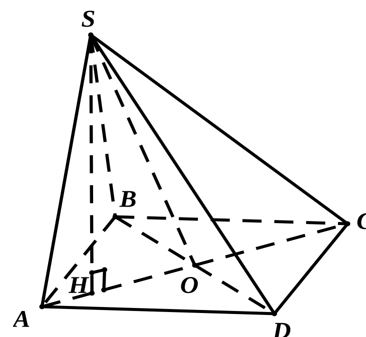
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng b .

a) Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

b) Tính đường cao của hình chóp $S.ABCD$ theo a,b .

c) Tìm sự liên hệ giữa a và b để $S.ABCD$ là một hình chóp đều.

Lời giải.



a) Gọi $O=AC\cap BD$, vì tứ giác $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b nên nó là một hình thoi, vì thế $AC\perp BD$ và O là trung điểm của BD.

Mặt khác $SB=SD=b\Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S, do đó $SO\perp BD$.

Vậy $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SO \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$

$\Rightarrow (SAB)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

b) Ta có $\begin{cases} (SAC)\perp(ABCD) \\ (SAC)\cap(ABCD)=AC \end{cases}$ nên trong (SAC) kẻ $SH\perp AC, H\in AC$ thì $SH\perp(ABCD)$, hay SH là đường cao của hình chóp.

Do hình chóp có các cạnh $SB=SD=b, CB=CD=b, AB=AD$ nên các tam giác SBD,CBD,ABD là các tam giác cân bằng nhau suy ra $OS=OA=OC\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S. Từ đó ta có

$SH.AC=SA.SC\Rightarrow SH=\frac{SA.SC}{AC}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Hình chóp $S.ABCD$ là một hình chóp đều. thì các cạnh bên bằng nhau nên $a=b$.

Và khi $a=b$ thì $AC=a\sqrt{2}$ mà $ABCD$ là hình thoi cạnh a nên nó là hình vuông , tứ đó $S.ABCD$ là một hình chóp đều.

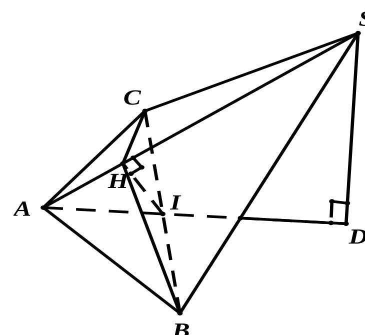
Vậy $S.ABCD$ là một hình chóp đều khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d\perp(ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB)\perp(SAC)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI\perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC\perp AD \\ BC\perp SD \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAD)\Rightarrow BC\perp SA$.



Dựng $IH\perp SA, H\in SA$, khi đó ta có $\begin{cases} SA\perp IH \\ SA\perp CB \end{cases}\Rightarrow SA\perp(HCB)$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là BHC.

Ta có $\Delta AHI\sim\Delta ADS\Rightarrow\frac{IH}{SD}=\frac{AI}{AD}$.

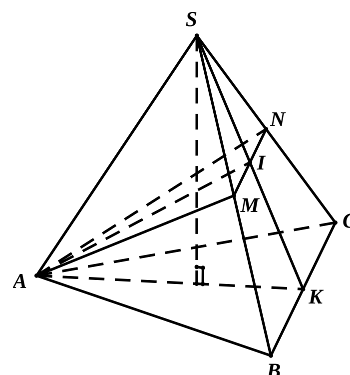
Mà $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}, AD=2AI=a\sqrt{3}$,

$SA=\sqrt{AD^2+SD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ suy ra $IH=\frac{AI.SD}{AD}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}}=\frac{a}{2}=\frac{BC}{2}\Rightarrow BHC=90^0$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SB. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN)\perp(SBC)$. **(ĐH khối A-2002)**

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của BC và $I=SK\cap MN$. Từ giả thiết ta có $MN=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}, MN//BC\Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN. Ta có $\Delta SAB=\Delta SAC\Rightarrow$ hai trung tuyến tương ứng $AM=AN\Rightarrow\Delta AMN$ cân tại $A\Rightarrow AI\perp MN$.



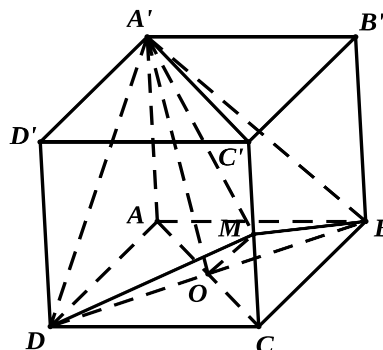
Mặt khác $\begin{cases} (SBC)\perp(AMN) \\ (SBC)\cap(AMN)=MN \\ AI\subset(AMN) \\ AI\perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow AI\perp(SBC)\Rightarrow AI\perp SK\Rightarrow\Delta SAK$ cân tại $A\Rightarrow SA=AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SK^2=SB^2-BK^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}\Rightarrow AI=\sqrt{SA^2-SI^2}=\sqrt{SA^2-\left(\frac{SK}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $S_{AMN}=\frac{1}{2}MN.AI=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AD=a, AA'=b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau. **(ĐH khối A-2003)**



Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD=(A'BD)\cap(MBD)$, $\begin{cases}AC\perp BD\\AA'\perp BD\end{cases}\Rightarrow(ACC'A')\perp BD$

Vậy $\begin{cases}(ACC'A')\perp BD\\(ACC'A')\cap(A'BD)=OA'\\(ACC'A')\cap(MBD)=OM\end{cases}$ do đó góc giữa hai đường thẳng OM,OA' chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM=\frac{AC'}{2}=\frac{\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}}{2}=\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

$OA'^2=AO^2+AA'^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+b^2=\frac{a^2}{2}+b^2$.

$MA'^2=A'C'^2+MC'^2=a^2+b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=a^2+\frac{5b^2}{4}$.

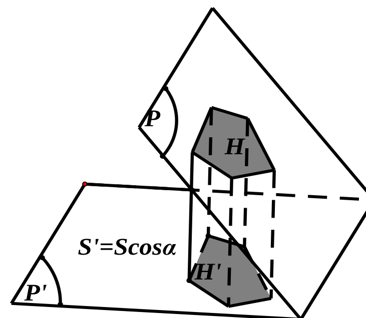
Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow\Delta OMA'$ vuông tại $O\Leftrightarrow OM^2+OA'^2=MA'^2$

$\Leftrightarrow\frac{2a^2+b^2}{4}+\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)=\left(a^2+\frac{5b^2}{4}\right)\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$

$(A'BD)\perp(MBD)$ khi $\frac{a}{b}=1$ (Khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương)

Bài toán 03: ỨNG DỤNG CÔNG THỨC HÌNH CHIẾU.

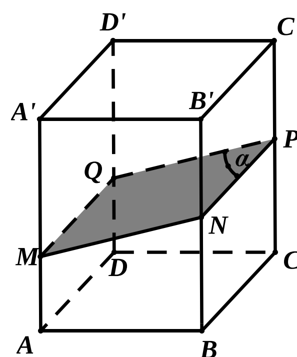
Giả sử S là diện tích đa giác (H) nằm trong (P) và S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (P') thì $S'=S\cos\phi$ trong đó ϕ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D$. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 45^0 và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M,N,P,Q. Tính diện tích thiết diện, biết cạnh đyá của lăng trụ bằng a.

Lời giải.



Gọi S là diện tích thiết diện $MNPQ$.

Ta có hình chiếu của $MNPQ$ xuông $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

$S' = S_{ABCD} = a^2$

Gọi $\phi = ((\alpha),(ABCD))$ thì $\phi = 45^0$

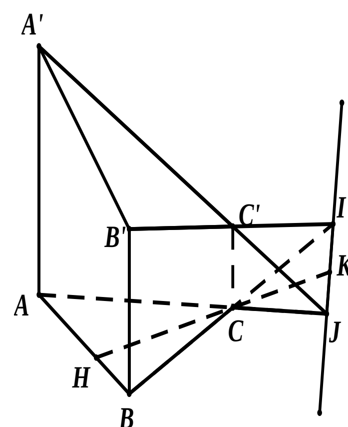
Do $S' = S\cos\phi = S\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}S' = \sqrt{2}a^2$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) kẻ từ A,B,C lần lượt lấy các điểm A',B',C' tương ứng nằm về một phía của (P) sao cho $AA_1 = 3a, BB_1 = 2a, CC_1 = a$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{3a^2}{2}$.

Vì $CH \perp AB, CH = a, AH = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ và $BAC = 45^0$.



Gọi $I = B'C' \cap BC, J = A'C' \cap AC$.

Ta có $CC' = \frac{1}{2}BB' \Rightarrow BC = CI$

$CC' = \frac{1}{3}AA' \Rightarrow CJ = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔBCH ta có $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 5a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$

Mặt khác

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.AB\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = -\frac{1}{10}$.

Xét ΔICJ ta có $IJ^2 = CI^2 + CJ^2 - 2CI.CJ\cos ICJ = \frac{26a^2}{4}$.

Kẻ đường cao CK của ΔICK, do $CC'\perp(ICJ)$ nên $C'K\perp IJ$.

Vậy $C'KC$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$

nên $S_{ABC}=S_{A'B'C'}\cos C'KC$.

Ta có $S_{ICJ}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{3a^2}{4}$, mặt khác $S_{ICJ}=\frac{1}{2}IJ.CK$

$$\Rightarrow CK=\frac{2S_{ICJ}}{IJ}=\frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{\sqrt{26}a}{2}}=\frac{3a}{\sqrt{26}}.$$

Xét $\Delta C'CK$ ta có $\tan C'KC=\frac{CC'}{CK}=\frac{a}{\frac{3a}{\sqrt{26}}}=\frac{\sqrt{26}}{3}$.

Mà $1+\tan^2 C'KC=\frac{1}{\cos^2 C'KC}\Rightarrow\cos C'KC=\frac{3}{\sqrt{35}}$.

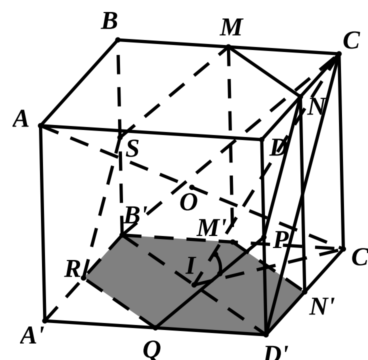
Vậy $S_{ABC}=S_{A'B'C'}\cos C'KC\Rightarrow S_{A'B'C'}=\frac{S_{ABC}}{\cos C'KC}=\frac{\sqrt{35}}{2}a^2$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của hình lập phương và vuông góc với đường chéo AC'. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi (α).

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, do $MA=MC'=a\sqrt{5}$ nên $\Delta MAC'$ cân tại M, mà O là trung điểm của $AC'\Rightarrow MO\perp AC'$ $\Rightarrow M\in(\alpha)$.

Tương tự, (α) sẽ cắt các cạnh $DC, DD', A'D', A', B'B$ tại các điểm N,P,Q,N,S. Thiết diện là lục giác $MNPQRS$. Xét phép chiếu vuông góc xuống mặt phẳng $(A'B'C'D')$, ta có hình chiếu của lục giác $MNPQRS$ là lục giác $M'N'D'QRB'$.



Gọi S,S' lần lượt là diện tích của các lục giác $MNPQRS$ và $M'N'D'QRB'$ thì $S'=S\cos\varphi$ (1) với φ là góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có $S'=S_{A'B'C'D'}-\left(S_{A'QR}+S_{C'M'N'}\right)$

$$=a^2-\left(\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{8}\right)=\frac{3a^2}{4}.\ (2)$$

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì $(ICC')\perp B'D'$ nên CIC' là góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có $\cos CIC'=\dfrac{IC}{IC'}=\dfrac{IC}{\sqrt{CC'^2+IC^2}}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Lại có $(\alpha)//(CB'D')$ nên $\phi=CIC'\Rightarrow\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (3)

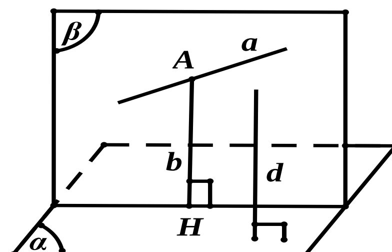
Từ (1),(2),(3) ta có $S=\dfrac{S'}{\cos\phi}=\dfrac{\dfrac{3a^2}{4}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy diện tích thiết diện là $S=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Bài Toán: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a không vuông góc với (α). Xác định mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với (α).



Để giải bài toán này ta làm theo các bước sau:

- Chọn một điểm $A\in a$
- Dựng đường thẳng b đi qua A và vuông góc với (α). Khi đó $mp(a,b)$ chính là mặt phẳng (β).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a

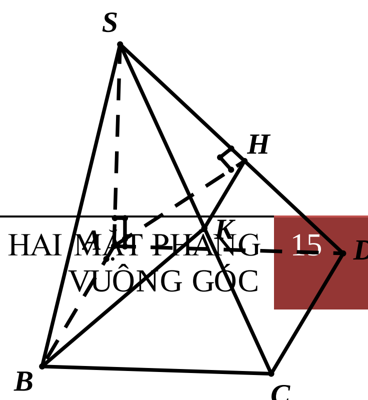
cạnh $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Goi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Xác định và tính thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi (α).

Lời giải.

Kẻ $AH\perp SD$.

Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp CD$, lại có $CD\perp AD$ nên $CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AD$.

Từ đó ta có $\begin{cases}AH\perp SD\\AH\perp CD\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SCD)$



$\Rightarrow (ABH)\perp(SCD)$.

Vậy (ABH) chính là mặt phẳng (α).

Ta có $\begin{cases} AB\subset(\alpha) \\ CD\subset(SCD) \\ AB // CD \\ H\in(\alpha)\cap(SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha)\cap(SCD)=HK // AB // CD$. Thết diện là tứ giác $AHKB$.

Dễ thấy $AHKB$ là hình thang vuông tại A và H, nên $S_{AHKB}=\frac{1}{2}(AB+HK)AH$.

Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSCD có $HK // CD$ nên $\frac{HK}{CD}=\frac{SH}{SD}=\frac{SH.SD}{SD^2}=\frac{SA^2}{SD^2}$

$=\frac{SA^2}{SA^2+AD^2}=\frac{3a^2}{3a^2+a^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow HE=\frac{3}{4}CD=\frac{3}{4}a$.

Vậy $S_{AHKB}=\frac{1}{2}(AB+HK)AH=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3a}{4}\right)\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Ví dụ 2.

a) (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$.

b) Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN=x$. Mặt phẳng (β) đi qua MN và vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (β).

Lời giải.

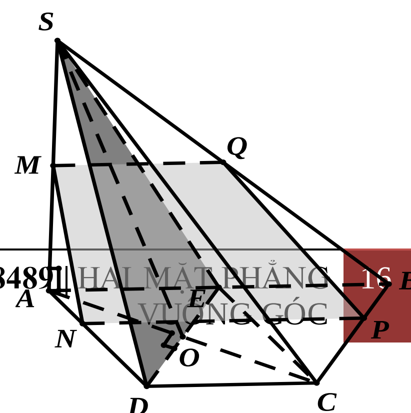
a) Gọi E là trung điểm của cạnh AB và O là giao điểm của AC và DE thì $ADCE$ là hình vuông có tâm là O.

Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp OD$, thêm nữa $OD\perp AC\Rightarrow OD\perp(SAC)$.

Từ đó ta có $OD\perp(SAC)\Rightarrow(SDO)\perp(SAC)$.

Vậy (SDO) chính là mặt phẳng (α).

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tam giác SDE.



Ta có $SO=\sqrt{OA^2+AS^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+a^2}=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$BC=DE=a\sqrt{2}$, do $DE\perp(SAC)\Rightarrow DE\perp AO\Rightarrow S_{SDE}=\frac{1}{2}SO.DE$

$=\frac{1}{2}.a\sqrt{\frac{3}{2}}.a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases}AB\perp(SAD)\\(\beta)\perp(SAD)\end{cases}\Rightarrow AB//(\beta)$.

Vậy $\begin{cases}M\in(\beta)\cap(SAB)\\AB\subset(SAB)\\AB//(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\beta)\cap(SAB)=MQ//AB, Q\in SB$.

Tương tự, $\begin{cases}N\in(\beta)\cap(ABCD)\\AB\subset(ABCD)\\AB//(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\beta)\cap(ABCD)=NP//AB, P\in BC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Do $\begin{cases}NP//AB\\MQ//AB\end{cases}\Rightarrow NP//MQ\ (1)$

Lại có $\begin{cases}MN\subset(SAD)\\AB\perp(SAD)\end{cases}\Rightarrow AB\perp MN\ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M và N.

Do đó $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(NP+MQ)MN$.

$MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+x^2}=\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2}$, $MQ=\frac{1}{2}AB=a$

$\frac{NP}{AB}=\frac{DN}{DA}\Rightarrow NP=\frac{AB.DN}{DA}=\frac{2a(a-x)}{a}=2(a-x)$

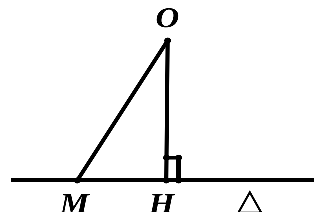
Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(2(a-x)+a)\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2}=\frac{(3a-x)\sqrt{a^2+4x^2}}{2}$.

KHOẢNG CÁCH

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

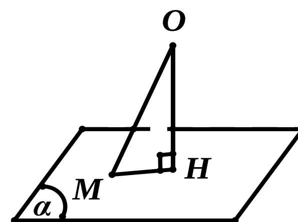


Cho điểm M và một đường thẳng Δ. Trong $mp(M,\Delta)$ gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ.

$d(M,\Delta)=MH$

Nhận xét: $OH\le OM,\forall M\in\Delta$

2. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.

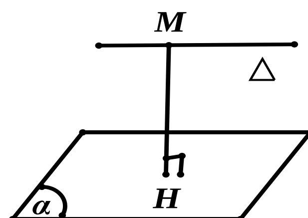


Cho mặt phẳng (α) và một điểm M, gọi H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

$d(M,(\alpha))=MH$

Nhận xét: $OH\le MO,\forall M\in(\alpha)$

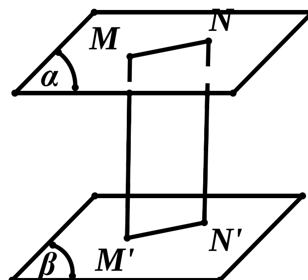
3. Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng.



Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).

$d(\Delta,(\alpha))=d(M,(\alpha)),M\in\Delta$.

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

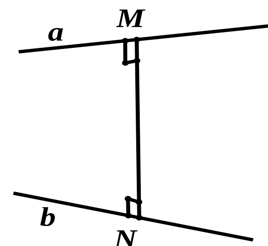


Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳn kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$d((\alpha),(\beta))=d(M,(\beta))=d(N,(\alpha))$ $,M\in(\alpha),N\in(\beta)$.

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng chéo nhau a,b. Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM M ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG Δ.

Phương pháp:

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ, rồi xem MH là đường cao của một tam giác nào đó để tính. Điểm H thường được dựng theo hai cách sau:

- Trong $mp(M,\Delta)$ vẽ $MH\perp\Delta\Rightarrow d(M,\Delta)=MH$
- Dựng mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với Δ tại H

$\Rightarrow d(M,\Delta)=MH$.

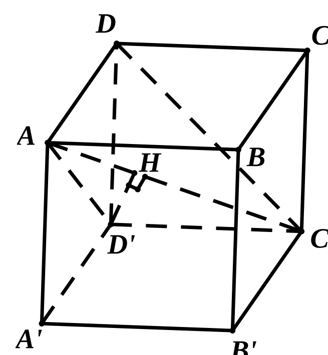
Hai công thức sau thường được dùng để tính MH

- ΔMAB vuông tại M và có đường cao AH thì $\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MB^2}$.
- MH là đường cao của ΔMAB thì $MH=\frac{2S_{MAB}}{AB}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng các từ đỉnh D' đến đường chéo AC'.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của D' trên AC'.

Do $\begin{cases} C'D'\perp D'A' \\ C'D'\perp DD' \end{cases}\Rightarrow C'D'\perp(ADD'A')$

$\Rightarrow C'D'\perp D'A$.

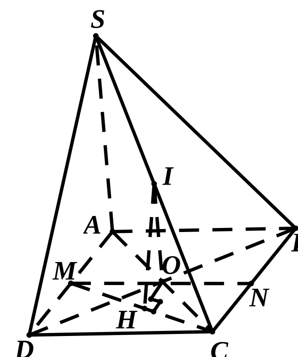
Vậy tam giác $D'AC'$ vuông tại D' có đường cao $D'H$ suy ra

$$\frac{1}{D'H^2}=\frac{1}{D'A^2}+\frac{1}{D'C'^2}=\frac{1}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow D'H=a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Vậy $d(D',AC')=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB. Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM.

Lời giải.



Trong (ICM) kẻ $IH \perp CM$ thì $d(I,CM) = IH$.

Gọi $N = MO \cap DC, N \in CD$.

Ta có $\Delta MHO \sim \Delta MNC \Rightarrow \frac{OH}{CN} = \frac{OM}{MC}$

Mà $OM = CN = \frac{a}{2}, CM = \sqrt{BM^2 + BC^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $OH = \frac{CN.OM}{MC} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$, OI là đường trung bình trong tam giác SAC nên $OI = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

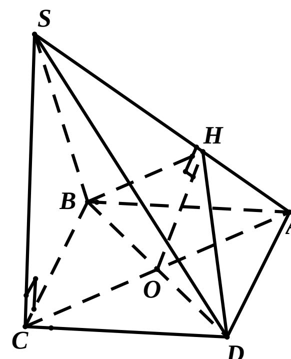
Ta có $\begin{cases} OI // SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OH \Rightarrow \Delta OHI$ vuông tại O nên

$IH = \sqrt{OH^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

Vậy $d(I,CM) = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, góc $ABC = 120^0$, $SC \perp (ABCD)$ và $SC = h$. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng SA theo a và h.

Lời giải.



Kẻ $OH \perp SA, H \in SA$ thì $d(O,SA) = OH$.

Do $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $ABC = 120^0$ nên ΔCBD đều cạnh $a \Rightarrow CO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CA = 2CO = a\sqrt{3}$.

$SA = \sqrt{CS^2 + CA^2} = \sqrt{h^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3a^2 + h^2}$

Hai tam giác vuông AHO va ACS đồng dạng nên

$$\frac{OH}{SC}=\frac{OA}{SA}\Rightarrow OH=\frac{OA.SC}{SA}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.h}{\sqrt{3a^2+h^2}}=\frac{ah\sqrt{3}}{2\sqrt{3a^2+h^2}}$$

Vậy $d(O,SA)=OH=\dfrac{\sqrt{3}ah}{2\sqrt{3a^2+h^2}}$.

Ví dụ 4. . Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BE.

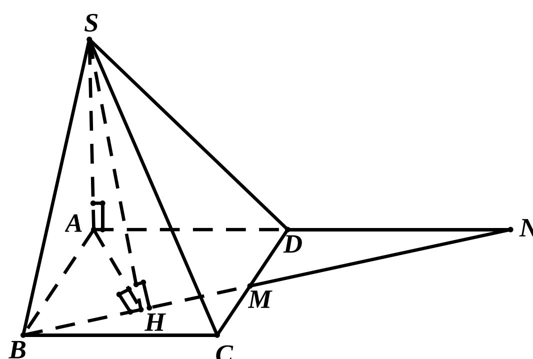
Lời giải.

Trong (SBM) kẻ $SH\perp BM$ thì $d(S,BM)=SH$.

Gọi $N=BM\cap AD$, ta có

$AD\,//\,BC\Rightarrow\dfrac{DN}{BC}=\dfrac{MD}{MC}=1\Rightarrow DN=BC=a$

$\Rightarrow AN=2a$.



Tronh tam giác vuông ABN có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AN^2}$

$=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(2a)^2}=\dfrac{5}{4a^2}$

$\Rightarrow AH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

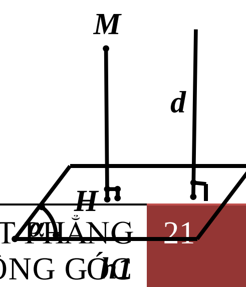
$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AH\Rightarrow\Delta ASH$ vuông tại A, do đó $SH=\sqrt{AH^2+AS^2}=\sqrt{\dfrac{4}{5}a^2+a^2}=\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(S,BM)=SH=\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 02: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

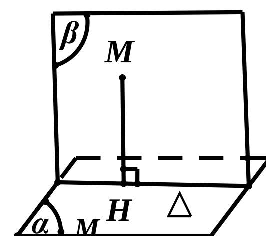
Phương pháp:

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α). Để xác định được vị trí hình chiếu này ta có một số lưu ý sau:



- Nếu có $d\perp(\alpha)$ thì $MH\,//\,d$ (h1).

- Chọn (β) chứa điểm M, rồi xác định giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$. Trong (β) dựng $MH\perp\Delta\Rightarrow MH\perp(\alpha)$ (h2).

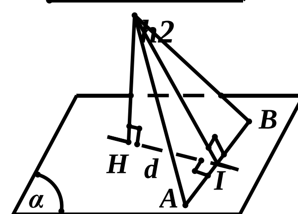


- Nếu trong (α) có hai điểm A,B sao cho $MA=MB$ thì trong (α) kẻ đường trung trực d của đoạn AB, rồi trong $mp(M,d)$ dựng $MH\perp d$. Khi đó $MH\perp(\alpha)$ (h3)

Thật vậy, Gọi I là trung điểm của AB. Do $MA=MB$ nên ΔMAB cân tại $M\Rightarrow MI\perp AB\subset(\alpha)$. Lại có $AB\perp d\Rightarrow AB\perp mp(M,d)$

$\Rightarrow AB\perp MH$.

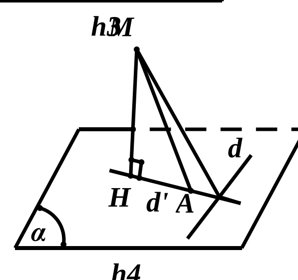
Vậy $\begin{cases}MH\perp AB\\ MH\perp d\end{cases}\Rightarrow MH\perp(\alpha)$.



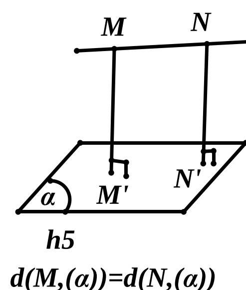
- Nếu trong (α) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA\perp d$ thì trong (α) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d'\perp d$, rồi trong $mp(M,d')$ kẻ $MH\perp d'\Rightarrow MH\perp(\alpha)$.(*h4*)

Thật vậy, do $d\perp d'$ và $d\perp MA\Rightarrow d\perp mp(M,d')\Rightarrow d\perp MH$

Lại có $MH\perp d'\Rightarrow MH\perp mp(d,d')\equiv(\alpha)$.



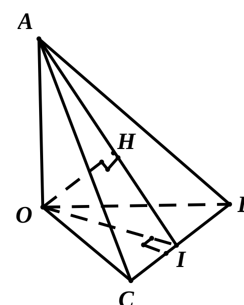
- Nếu trong (α) có các điểm $A_1,A_2,...,A_n$ ($n\geq3$) mà $MA_1=MA_2=...=MA_n$ hoặc các đường thẳng $MA_1,MA_2,...,MA_n$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M trên (α) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Nếu trong (α) có các điểm $A_1,A_2,...,A_n$ ($n\geq3$) mà các mặt phẳng $(MA_1A_2),(MA_2A_3),...,(MA_nA_1)$ thì hình chiếu của M là tâm đường tròn nội tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Đôi khi, thay vì hình chiếu của điểm M xuống (α) ta có thể dựng hình chiếu một điểm N khác thích hợp hơn sao cho $MN//(\alpha)$. Khi đó $d(M,(\alpha))=d(N,(\alpha))$. (h5)



h5

d(M,(α))=d(N,(α))

- Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tư như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:
- Nếu tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.



Các ví dụ

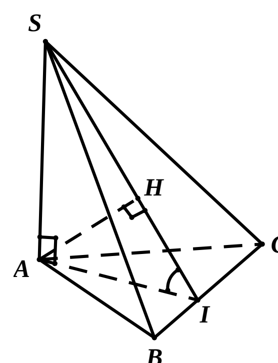
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$

Vậy AIS chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow AIS = 60^0$.



Trong (SBC) kẻ $AH \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

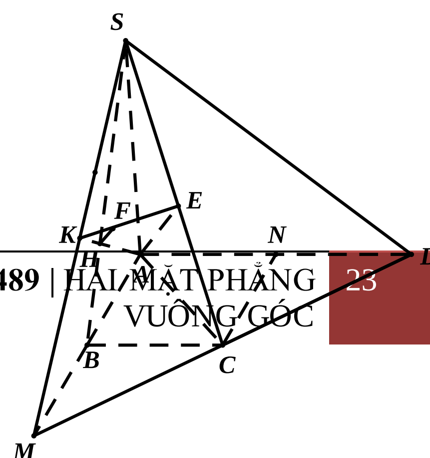
Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác AIS ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{4h^2 + 3a^2}{3a^2h^2} \Rightarrow AH = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Hay $d(A,(SBC)) = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



Trong $(ABCD)$ gọi $M = AB \cap CD$, trong (SAM) gọi $K = AH \cap SM$, kẻ $AE \perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD.

Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $NC = AB = a$. Do đó $NA = NC = ND = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$, lại có $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

Vậy $\begin{cases} (SAC) \perp (SCD) \\ (SAC) \cap (SCD) = SC \\ AE \subset (SAC) \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SCD)\ \ (1)$

Trong (AKE) kẻ $HF // AE, F \in KE$, thì từ (1) suy ra $HF \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF$.

Do $BC // AD \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2AB = 2a \Rightarrow B$ là trung điểm của MA.

Lại có $\frac{BH}{BS} = \frac{BH.BS}{BS^2} = \frac{BA^2}{AB^2 + AS^2} = \frac{a^2}{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$.

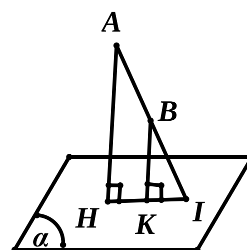
Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM, do đó $\frac{HF}{AE} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HF = \frac{1}{3}AE$.

Tứ diện $ADMS$ có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và $AE \perp (SMD)$ nên

$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2}$

$= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AE = a$.

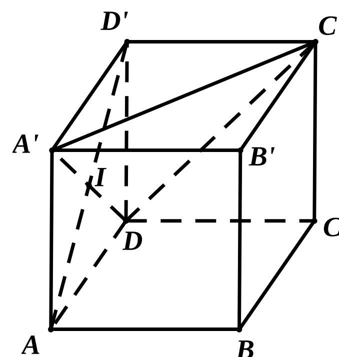
Vậy $\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF = \frac{1}{3}AE = \frac{a}{3}$.



Nhận xét: Từ bài trên ta thấy nếu đường thẳng AB cắt (α) tại I thì $\frac{d(A,(\alpha))}{d(B,(\alpha))} = \frac{IA}{IB}$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thức $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

Lời giải.



Gọi I là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ thì I là trung điểm của AD'.

Ta có $\dfrac{d(A,(DA'C'))}{d(D',(DA'C'))}=\dfrac{IA}{ID'}=1$

$\Rightarrow d(A,(DA'C'))=d(D',(DA'C'))$.

Mặt khác ta có tứ diện $D'ADC'$ có các cạnh $D'D, D'A', D'C'$ đôi một vuông góc nên $\dfrac{1}{d^2(D',(DA'C'))}=\dfrac{1}{D'D^2}+\dfrac{1}{D'A'^2}+\dfrac{1}{D'C'^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$.

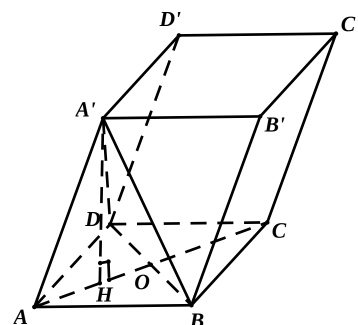
Vậy $d(A,(DA'C'))=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $BAA'=BAD=DAA'=60^0$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

Lời giải.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và $BAA'=BAD=DAA'=60^0$ nên các tam giác ABA', ABD, ADA' đều là các tam giác đều cạnh $a \Rightarrow A'A=A'B=A'D$ (A' cách đều ba đỉnh của ΔABD)

Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ thì các tam giác vuông $A'HA, A'HB, A'HD$ bằng nhau nên $HA=HB=HD$ suy ra H là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABD.



Gọi O giao điểm của AC và BD, ta có $AH=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Vậy $d(A',(ABCD))=A'H=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

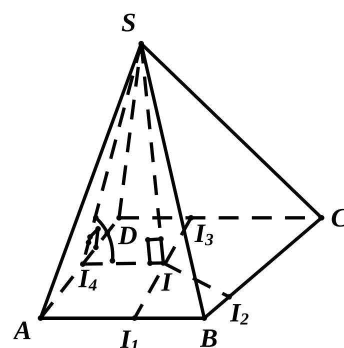
Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều và có cạnh bằng $2a$, $BC=3a$ các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$, Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB, BC, CD, DA thì các góc $II_iS(i = 1,4)$ là góc giữa các mặt bên và mặt đáy do đó chúng bằng nhau,suy ra các tam giác vuông $SII_1, SII_2, SII_3, SII_4$ bằng nhau nên $II_1 = II_2 = II_3 = II_4 \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp hình thang $ABCD$.

Vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + DC = AD + BC = 5a$

Diện tích hình thang $ABCD$ là $S = \frac{1}{2}(AB + DC)AD = \frac{1}{2}.5a.2a = 5a^2$



Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang $ABCD$ thì $p = \frac{AB + DC + AD + BC}{2} = \frac{10a}{2} = 5a$

$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{5a^2}{5a} = a \Rightarrow II_4 = r = a$.

Tam giác SAD đều và có cạnh $2a$ nên

$SI_4 = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow SI = \sqrt{SI_4^2 - II_4^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$ Vậy $d(S,(ABCD)) = SI = a\sqrt{2}$.

Bài toán 03: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:

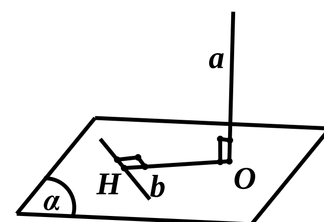
Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b. Khi đó $d(a,b) = MN$. Sau đây là một số cách dựng đoạn vuông góc chung thường dùng :

Nếu $a \perp b$ thì ta dựng đoạnvuông góc chung của a và b như sau

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$.
- Dựng $OH \perp b$.

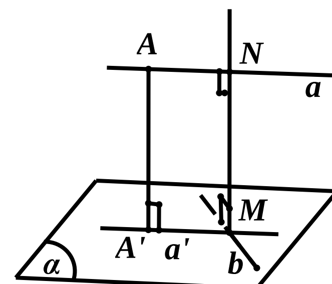
Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b.



Nếu a, b không vuông góc với nhau thì có thể dựng đoạn vuông góc chung của a và b theo hai cách sau:

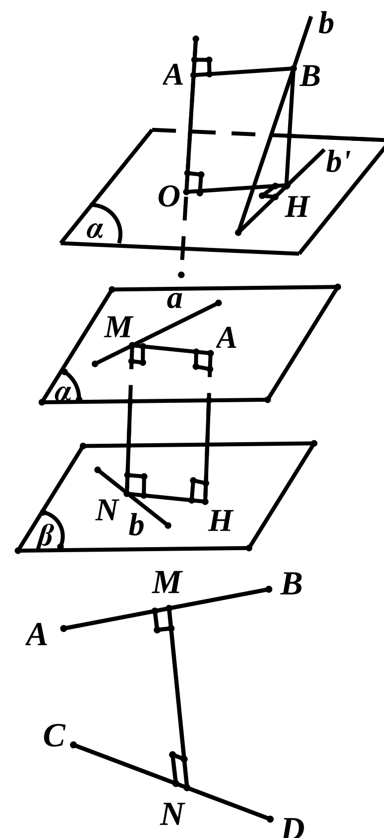
Cách 1.

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ trên (α).
- Trong (α) dựng đường thẳng a' đi qua A' và song song với a cắt b tại M, từ M dựng đường thẳng song song với AA' cắt a tại N. Đoạn MN chính là đoạn vuông góc chung của a và b.



Cách 2.

- Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$.
- Dựng hình chiếu b' của b trên (α)
- Trong (α) dựng $OH \perp b'$ tại H.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Đoạn AB chính là đoạn vuông góc chung của a và b.



- Xem khoảng cách giữa hai đường thẳng a, b chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm $A \in a$ đến mặt phẳng (α) chứa b và $(\alpha) /\!/ a$.
- Sử dụng $d(a,b) = d((\alpha),(\beta)) = d(A,(\beta)), A \in (\alpha)$
- Sử dụng phương pháp vec tơ

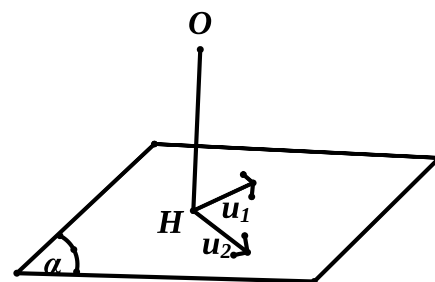
a) MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}$$

b) Nếu trong (α) có hai vec tơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ thì

$$OH = d(O,(\alpha)) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{u_2} \\ H \in (\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_2} = 0 \\ H \in (\alpha) \end{cases}.$$



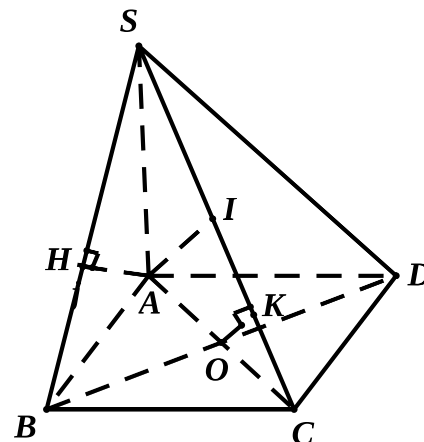
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng.

a) SB và AD.

b) BD và SC.

Lời giải.



a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$ Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên

$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD,SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $OK \perp SC, K \in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(BD,SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

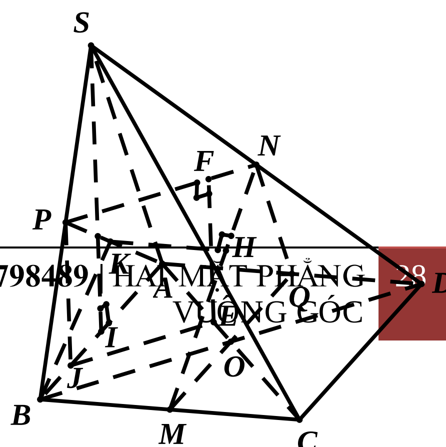
Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,SD,SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC.

b) MN và AP.

Lời giải.



a) Trong (SAB) kẻ $PJ \,//\, SI$, từ J kẻ $JE \,//\, BD, E \in AC$

Từ E kẻ $EF \,//\, PJ, F \in PN$.

Do $\begin{cases} PJ \,//\, SI \\ SI \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow PJ \perp (ABCD)$

$\Rightarrow PJ \perp AC \;\; (1)$.

Lại có $\begin{cases} PN \,//\, BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow PN \perp AC \;\; (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF \subset (PNJ) \Rightarrow AC \perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.

$d(AC, PN) = EF = PJ = \frac{1}{2}SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ \,//\, AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow MQ \,//\, (SAB)$.

Tương tự $NQ \,//\, SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow NQ \,//\, (SAB)$.

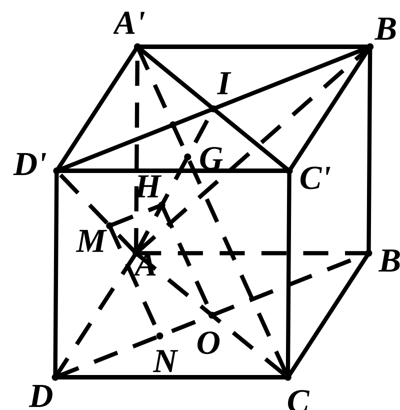
Vậy $(MNQ) \,//\, (SAB) \Rightarrow NM \,//\, (SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB \perp AB \\ MB \perp SI \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN, AP) = KH = MB = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.



Do $\begin{cases} BD \,//\, B'D' \\ AD' \subset (AB'D') \end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (CC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (1)$

Tương tự $A'C \perp AD' \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'C \perp (AB'D')$. Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A = A'B' = A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Vậy Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A, G, I thẳng hàng.

Trong $(ACC'A')$ dựng $OH // CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O \in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Dễ thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

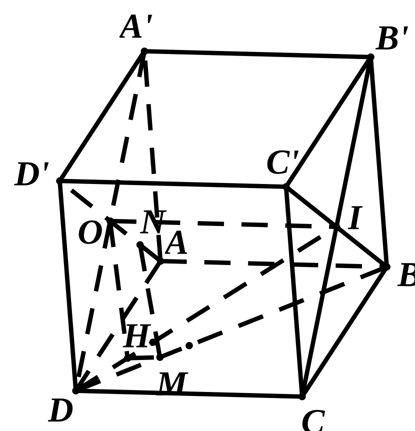
Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

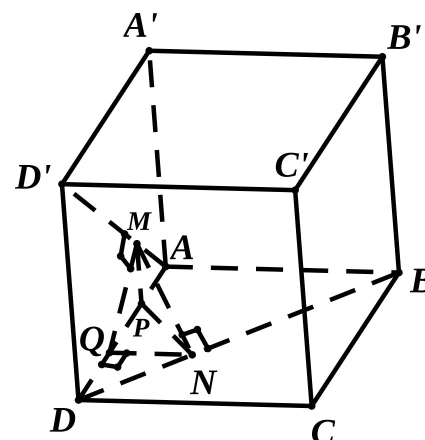
Chon $(DCB'A')$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp (DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.



Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Ta có $OHMN$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mạt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD',BD)=MN=OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M\in AD', N\in BD$. Từ M kẻ $MP\perp AD$, từ N kẻ $NQ\perp AD$.

Dễ thấy $BD\perp(MNP)\Rightarrow BD\perp NP$; $AD'\perp(MNQ)\Rightarrow AD'\perp MQ$.

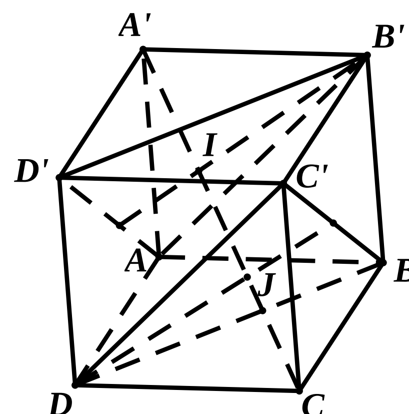
Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên

$QD=QN=QP=MP=PA=\frac{a}{3}$

Lại có $PN=\frac{DP}{\sqrt{2}}=\frac{2a}{3\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ đó $MN^2=PM^2+PN^2=\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{a^2}{3}\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.



Dễ thấy $\begin{cases}AD'\subset(AB'D')\\BD\subset(BDC')\\(AB'D')\,//\,(BDC')\end{cases}$

$\Rightarrow d(AD',BD)=d((AB'D'),(BDC'))$.

Gọi I,J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D'),(BDC')$.

Theo chứng minh trong cách 1 thì I,J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC'). Mặt khác dễ dạng chứng minh được $A'C\perp(AB'D'), A'C\perp(BDC)$.

suy ra $d(AD',BD)=d((AB'D'),(BDC'))=IJ=\frac{1}{3}A'C=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M\in AD', N\in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x},\overrightarrow{AD}=\vec{y},\overrightarrow{AA'}=\vec{z}\Rightarrow|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=a,\vec{x}\vec{y}=\vec{y}\vec{z}=\vec{z}\vec{x}=0$

$\overrightarrow{AD'}=\vec{y}+\vec{z}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD'}=k(\vec{y}+\vec{z}),\overrightarrow{DB}=\vec{x}-\vec{y}\Rightarrow\overrightarrow{DN}=m(\vec{x}-\vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{AM}=m\vec{x}+(1-k-m)\vec{y}-k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow\left(m\vec{x}+(1-k-m)\vec{y}+k\vec{z}\right)\left(\vec{x}-\vec{y}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2m+k-1=0$.

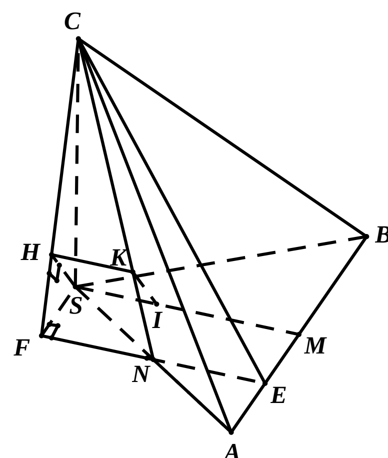
Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'}=0\Leftrightarrow 1-m-2k=0$, từ đó ta có hệ $\begin{cases}2m+k=1\\ m+2k=1\end{cases}\Leftrightarrow m=k=\frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}-\frac{1}{3}\vec{z}\Rightarrow MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc và $SA=SB=SC=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.



Gọi E là trung điểm của AM, ta có $\begin{cases}NE\subset(CNE)\\ SM\,//\,NE\end{cases}\Rightarrow SM\,//\,(CNE)$,

do đó (CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF\perp NE$ thì

$\begin{cases}NE\perp SF\\ NE\perp CS\end{cases}\Rightarrow NE\perp(CSF)\Rightarrow(CSF)\perp(CNE)$ Trong (CSF) kẻ

$SH\perp CF\Rightarrow SH\perp(CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

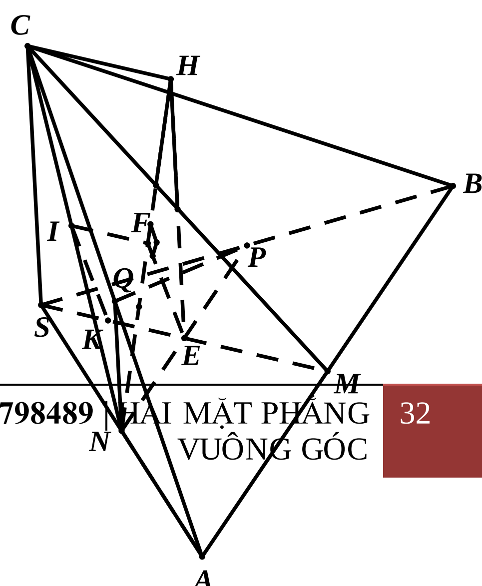
Ta có $SF=AM=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SF^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{9}{a^2}$

$\Rightarrow SH=\frac{a}{3}$.

Vậy $d\left(SM,CN\right)=IK=SH=\frac{a}{3}$.

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.

Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM.



Khi đó $NQ // CS, CS \perp (SAB)$

$\Rightarrow NQ \perp (SAB) \Rightarrow NQ \perp SM$

Lại có $SM \perp NP \Rightarrow SM \perp (NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH \Rightarrow CH // SE$, mà $SE \perp (NPQ) \Rightarrow CH \perp (NPQ)$, vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ). Kẻ $EF \perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

Tam giác EHN vuông tại E có đường cao EF

$$\Rightarrow \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EN^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{9}{a^2}.$$

$\Rightarrow EF = \frac{a}{3}$. Vậy $d(CN, SM) = IK = EF = \frac{a}{3}$.

Cách 3. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0$.

EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E \in SM \\ F \in CN \\ EF \perp SM \\ EF \perp CN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SE} = x\overrightarrow{SM} \\ \overrightarrow{CF} = y\overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM} = 0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN} = 0 \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{SE} = \vec{c} + y\overrightarrow{CN} - x\overrightarrow{SM}$

$$= \vec{c} - \frac{x}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + y\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}(y - x)\vec{a} - \frac{1}{2}x\vec{b} + (1 - y)\vec{c}.$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM} = 0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -x + 5y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{9} \\ y = \frac{8}{9} \end{cases}$

Vậy đường vuông góc chung của SM và CN là đường thẳng EF

với $\overrightarrow{SE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{CF} = \frac{8}{9}\overrightarrow{CN}$.

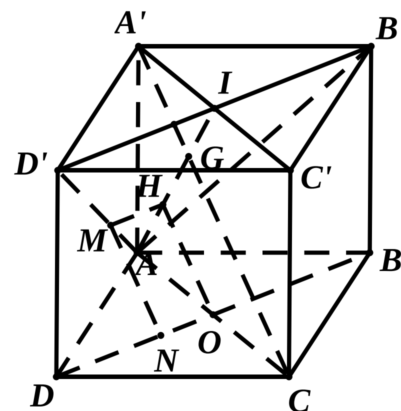
Lúc đó $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{9}\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c} \Rightarrow EF = \sqrt{\frac{4}{81}\vec{a}^2 + \frac{4}{81}\vec{b}^2 + \frac{4}{81}\vec{c}^2} = \frac{a}{3}$.

Vậy $d(CN,SM)=EF=\frac{a}{3}$.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.



Do $\begin{cases} BD // B'D' \\ AD' \subset (AB'D') \end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (CC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (1)$

Tương tự $A'C \perp AD' \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'C \perp (AB'D')$. Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A = A'B' = A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Vậy Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A,G,I thẳng hàng.

Trong $(ACC'A')$ dựng $OH // CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O \in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD',BD) = MN$.

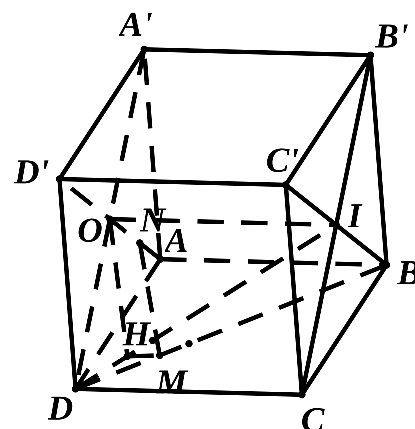
Dễ thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD',BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.



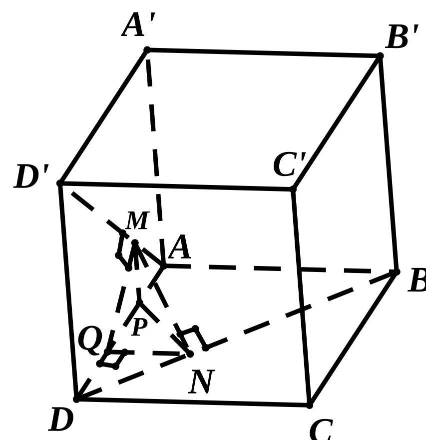
Chon $(DCB'A')$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp (DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.

Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD',BD) = MN$.

Ta có $OHMN$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mạt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(AD',BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$. Từ M kẻ $MP \perp AD$, từ N kẻ $NQ \perp AD$.

Dễ thấy $BD \perp (MNP) \Rightarrow BD \perp NP$; $AD' \perp (MNQ) \Rightarrow AD' \perp MQ$.

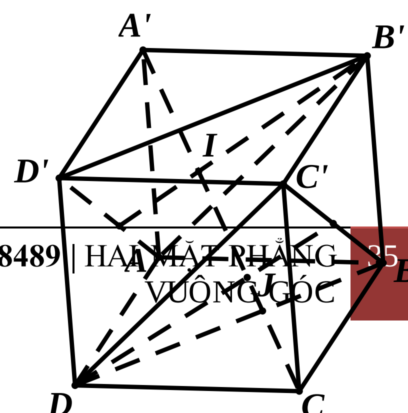
Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên

$$QD = QN = QP = MP = PA = \frac{a}{3}$$

Lại có $PN = \frac{DP}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ đó $MN^2 = PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.



Dễ thấy $\begin{cases} AD' \subset (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') // (BDC') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AD',BD) = d((AB'D'),(BDC'))$.

Gọi I,J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D'),(BDC')$.

Theo chứng minh trong cách 1 thì I,J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC'). Mặt khác dễ dạng chứng minh được $A'C \perp (AB'D')$, $A'C \perp (BDC)$.

suy ra $d(AD',BD) = d((AB'D'),(BDC')) = IJ = \frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

***Cách* 5.** Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a, \vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{x} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD'} = k(\vec{y} + \vec{z}), \overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} - k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} + k\vec{z})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

$\Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 2k = 0$, từ đó ta có hệ $\begin{cases} 2m + k = 1 \\ m + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = k = \frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

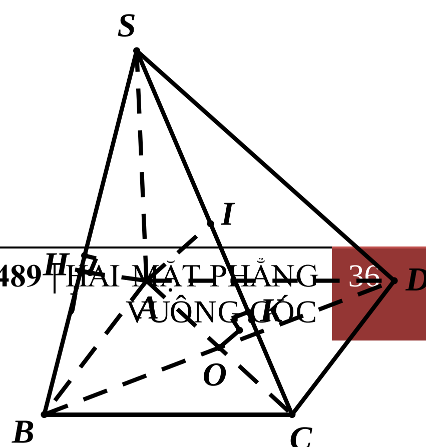
a) SB và AD.

b) BD và SC.

Lời giải.

a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$ Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB) = AH$.



Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH=\frac{1}{2}SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD,SB)=AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA \end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $OK\perp SC, K\in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC)=OK=\frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

Ta có $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(BD,SC)=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

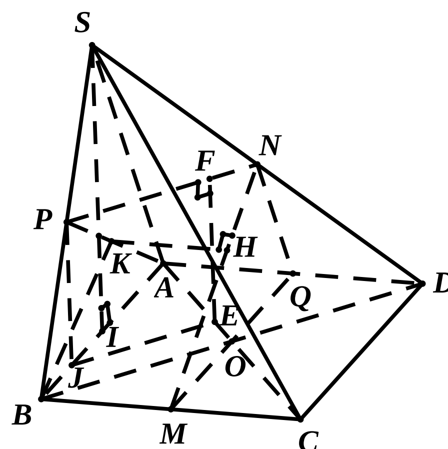
Ví dụ 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS\perp(ABCD)$ và $SI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,SD,SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC.

b) MN và AP.

Lời giải.



a) Trong (SAB) kẻ $PJ\,//\,SI$, từ J kẻ $JE\,//\,BD, E\in AC$

Từ E kẻ $EF\,//\,PJ, F\in PN$.

Do $\begin{cases} PJ\,//\,SI \\ SI\perp(ABCD) \end{cases}\Rightarrow PJ\perp(ABCD)$

$\Rightarrow PJ\perp AC\ (1)$.

Lại có $\begin{cases} PN\,//\,BD \\ BD\perp AC \end{cases}\Rightarrow PN\perp AC\ (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF\subset(PNJ)\Rightarrow AC\perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.

$d(AC,PN)=EF=PJ=\frac{1}{2}SI=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ // AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow MQ // (SAB)$.

Tương tự $NQ // SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow NQ // (SAB)$.

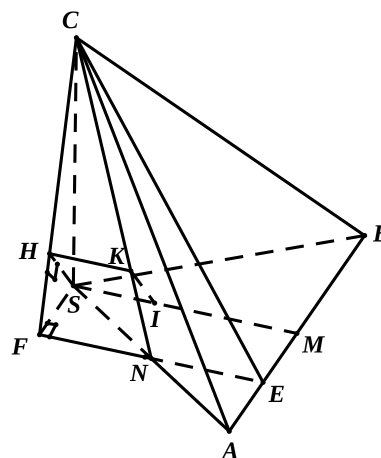
Vậy $(MNQ) // (SAB) \Rightarrow NM // (SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB \perp AB \\ MB \perp SI \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN, AP) = KH = MB = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.Cho tam giác ABC, dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.



Gọi E là trung điểm của AM, ta có $\begin{cases} NE \subset (CNE) \\ SM // NE \end{cases} \Rightarrow SM // (CNE)$,

do đó (CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF \perp NE$ thì

$\begin{cases} NE \perp SF \\ NE \perp CS \end{cases} \Rightarrow NE \perp (CSF) \Rightarrow (CSF) \perp (CNE)$ Trong (CSF) kẻ

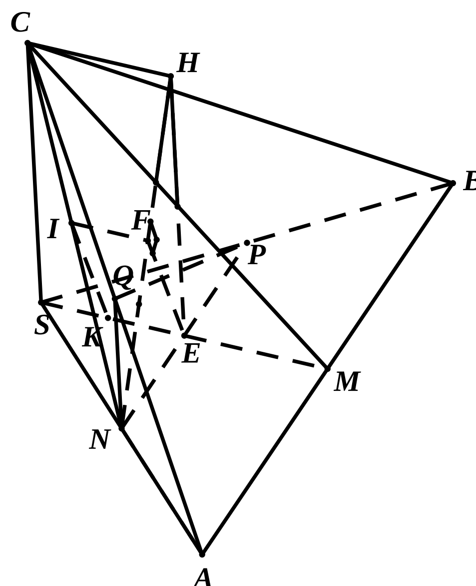
$SH \perp CF \Rightarrow SH \perp (CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

Ta có $SF = AM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SF^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2}$

$\Rightarrow SH = \frac{a}{3}$.

Vậy $d(SM, CN) = IK = SH = \frac{a}{3}$.

Cách **2.** Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM.

Khi đó $NQ // CS, CS \perp (SAB)$

$\Rightarrow NQ \perp (SAB) \Rightarrow NQ \perp SM$

Lại có $SM \perp NP \Rightarrow SM \perp (NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH \Rightarrow CH // SE$, mà $SE \perp (NPQ) \Rightarrow CH \perp (NPQ)$, vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ).Kẻ $EF \perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

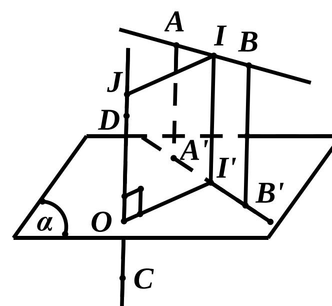
Tam giác EHN vuông tại E có đường cao EF

$$\Rightarrow \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EN^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{9}{a^2}.$$

$\Rightarrow EF = \frac{a}{3}$. Vậy $d(CN,SM) = IK = EF = \frac{a}{3}$.

Bài toán 03: ỨNG DỤNG PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:



Cho hai đường thẳng chéo nhau AB và CD

Xét mặt phẳng (α) vuông góc với CD tại điểm O.Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD ($I \in AB, J \in CD$)

Xét phép chiếu vuông góc lên (α), Gọi A',B',I' là hình chiếu của A,B,I thì $IJ = OI'$, từ đó $d(AB,CD) = d(O,A'B')$.

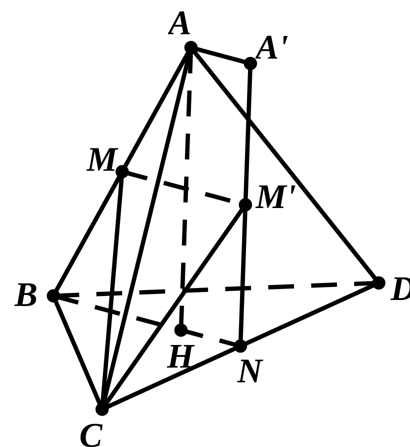
Vậy để tính IJ ta qui về tính OI' trong mặt phẳng (α).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.

Lời giải.

Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì $AH\perp(BCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua N và song song với AH thì $(\alpha)\perp BN$. Xét phép chiếu vuông góc lên (α), gọi A',B',C',D',H',M',N' lần lượt là ảnh của A,B,C,D,H,M,N thì $B'\equiv N'\equiv H'\equiv N$, $C'\equiv C, D'\equiv D$.



Ta có $d(CM,CD)=d(N,CM')$.

$$BH=\frac{2}{3}BN=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$NM'=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Tam giác NCM' vuông tại N nên

$$\frac{1}{d^2(N,CM')}=\frac{1}{CN^2}+\frac{1}{NM'^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{10}{a^2}\Rightarrow d(N,CM')=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $d(CM,BN)=d(N,CM')=\frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC.

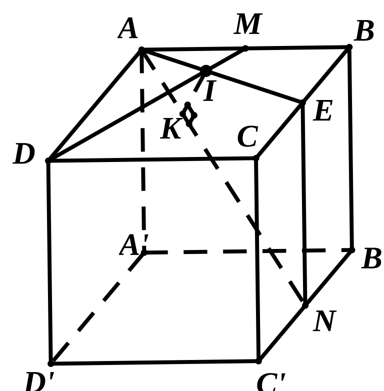
Dễ thấy $\Delta ADM=\Delta BAE$ nên $AMD=AEB$, mà

$AEB+BAE=90^0\Rightarrow AMD+BAE=90^0$

$\Rightarrow DM\perp AE$. Lại có $EN\perp(ABCD)\Rightarrow EN\perp DM$ do đó $(AEN)\perp DM$ tại I.

Xét phép chiếu vuông góc lên (ANE), ta có AN chính là hình chiếu của nó nên

$d(DM,AN)=d(I,AN)$



Gọi K là hình chiếu cuả I trên AN thì $d(I,AN)=IK$.

Ta có $\Delta AKI \sim \Delta AEN$, suy ra $\frac{IK}{EN}=\frac{AI}{AN}\Rightarrow IK=\frac{AI.EN}{AN}$ (1)

$AN^2=AE^2+EN^2=AB^2+BE^2+EN^2=\frac{9a^2}{4}\Rightarrow AN=\frac{3a}{2}$.

$\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Thay vào (1) ta được $IK=\frac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $d(DM,AN)=\frac{2a\sqrt{5}}{15}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

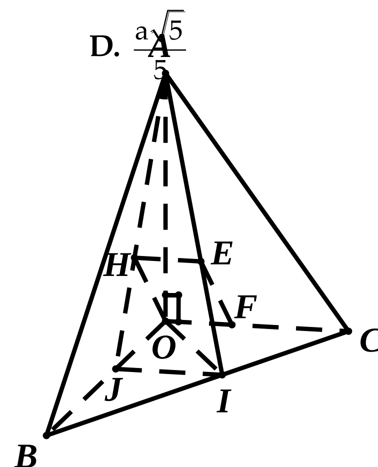
Câu 64. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa các cặp đường thẳng:

a) OA và BC

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{12}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) AI và OC

A. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$



Bài làm: 64 a) Do $\begin{cases}OA\perp OB\\OA\perp OC\end{cases}\Rightarrow OA\perp(OBC)\Rightarrow OA\perp OI$

Lại có $OB=OC$ và I là trung điểm của BC nên $OI\perp BC$. Vậy OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

$OI=\frac{BC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi J là trung điểm của OB thì mặt phẳng (AIJ) chứa AI và song song với OC. Hạ $OH\perp AJ, H\in AJ$.

Ta có $\begin{cases}IJ\,//\,OC\\OC\perp(OAB)\end{cases}\Rightarrow IJ\perp(OAB)\Rightarrow IJ\perp OH$ vì vậy $OH\perp(AIJ)$. Từ H kẻ đường thẳng song song với IJ cắt AI tại E, từ E kẻ đường thẳng song song với OH cắt OC tại F thì EF là đoạn vuông góc chunh của AI và OC.

Trong tam giác OAJ có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OJ^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{5}}{5}$

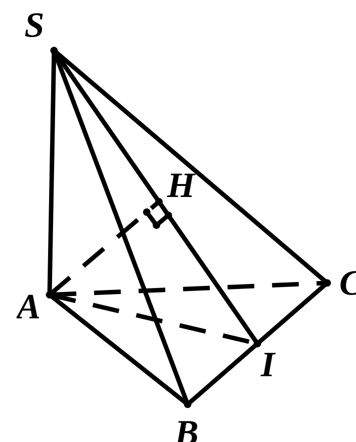
Vậy $EF=OH=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh $SA\perp(ABC)$ và $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $d(A,(SBC))=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $d(A,(SBC))=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $d(A,(SBC))=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $d(A,(SBC))=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài làm:65. Gọi I là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $AI\perp BC$, mặt khác $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC\Rightarrow(SAI)\perp(SBC)$

do đó hạ $AH\perp SI$ tại H thì $AH\perp(SBC)$.



Vậy $d(A,(SBC))=AH$.

Ta có $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}, SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ suy ra

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$=\frac{2}{a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hay $d(A,(SBC))=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, $AC=AD=4cm$, $AB=3cm$, $BC=5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

A. $d(A,(DBC))=\frac{\sqrt{34}}{17}$ **B.** $d(A,(DBC))=\frac{6\sqrt{12}}{17}$ **C.** $d(A,(DBC))=\frac{6\sqrt{3}}{17}$ **D.** $d(A,(DBC))=\frac{6\sqrt{34}}{17}$

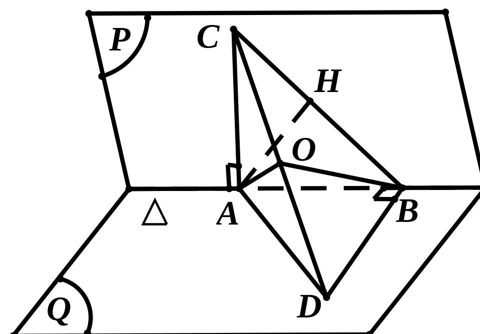
Bài làm: 66. Chứng minh được AB, AC, AD đôi một vuông góc, từ đó tính được $d(A,(DBC))=\frac{6\sqrt{34}}{17}$.

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2002)

Câu 67. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

A. $d(A,(BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $d(A,(BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ **C.** $d(A,(BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ **D.** $d(A,(BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

✍**Bài làm:67.** Gọi O là trung điểm của CD



Ta có $(P) \perp (Q)$ và $\Delta = (P) \cap (Q)$, mà $AC \perp \Delta$

$\Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $A \Rightarrow OA = OC = OD$.

Tương tự ΔBCD vuông tại $B \Rightarrow OB = OC = OD$.

Vậy $OA = OB = OC = OD$.

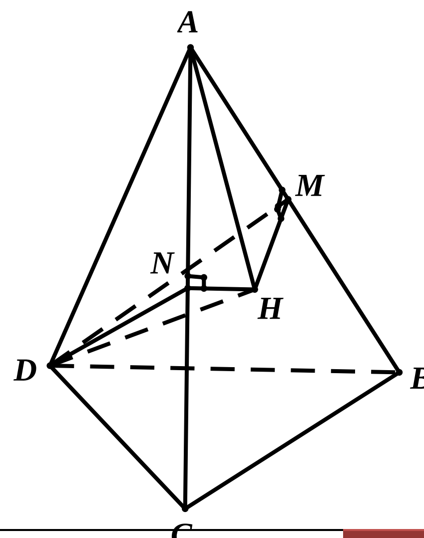
Hạ $AH \perp CB$ thì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$ do đó

$d(A,(BCD)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 68. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, AC = b, AD = c$ và $BAC = CAD = DAB = 60^0$. Tính khoảng cách từ D đến (ABC).

A. $d(D,(ABC)) = \frac{c\sqrt{6}}{2}$ **B.** $d(D,(ABC)) = \frac{c\sqrt{6}}{4}$ **C.** $d(D,(ABC)) = \frac{c\sqrt{5}}{3}$ **D.** $d(D,(ABC)) = \frac{c\sqrt{6}}{3}$

✍**Bài làm:68.** Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)



Hạ $HM \perp AB, HN \perp AC$.

Xét hai tam giác vuông AMD và AND có AD chung, $MAD = NAD = 60^0$ nên

$\Delta MAD = \Delta NAD \Rightarrow DM = DN \Rightarrow HM = HN$ do đó AH là đường phân giác góc A của tam giác ABC.

Ta có $AM = AD\cos 60^0 = \frac{c}{2}$.

$AH=\frac{AM}{\cos 30^0}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c\sqrt{3}}{3}$.

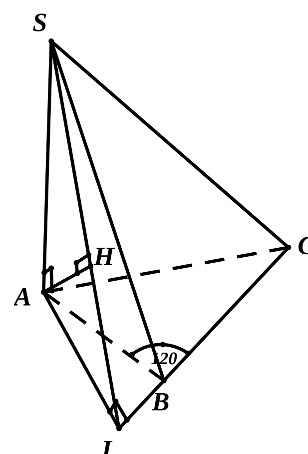
$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{c^2-\frac{c^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d\left(D,\left(ABC\right)\right)=\frac{c\sqrt{6}}{3}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=3a$ và $SA\perp\left(ABC\right)$. Tam giác ABC có $AB=BC=2a$, góc $ABC=120^0$. Tính khoảng cách từ A đến $\left(SBC\right)$.

A. $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{3a}{2}$ **B.** $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{a}{2}$ **C.** $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{7a}{2}$ **D.** $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=2a$

Bài làm:69. Kẻ $AI\perp BC, I\in BC$, ta có $\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp SA\end{cases}$



$\Rightarrow BC\perp\left(SAI\right)$.

Kẻ $AH\perp SI$ thì $\begin{cases}AH\perp SI\\AH\perp BC\end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(SBC\right)$.

Vậy $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH$.

Ta có $ABI=60^0$, $AI=AB\sin 60^0=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{\left(3a\right)^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}$

$=\frac{4}{9a^2}\Rightarrow AH=\frac{3a}{2}$.

Vậy $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{3a}{2}$.

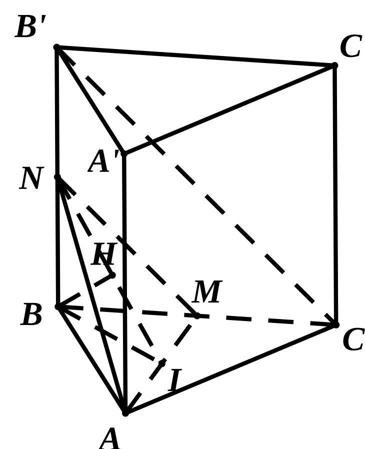
Câu 70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2008)

A. $d\left(AM,B'C\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $d\left(AM,B'C\right)=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $d\left(AM,B'C\right)=\frac{a\sqrt{7}}{7}$ **D.** $d\left(AM,B'C\right)=\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Bài làm: 70. Gọi N là trung điểm của BB' ; ta có

$\begin{cases} B'C // MN \\ MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow B'C // (AMN)$ do đó



$d(AM, B'C) = d(B', (AMN))$. Mặt khác N là trung điểm của BB'

nên $d(B', (AMN)) = d(B, (AMN))$

Kẻ $BI \perp AM$ thì $AM \perp (BNI)$, kẻ $BH \perp NI \Rightarrow BH \perp (AMN)$ nên $d(B, (AMN)) = BH$.

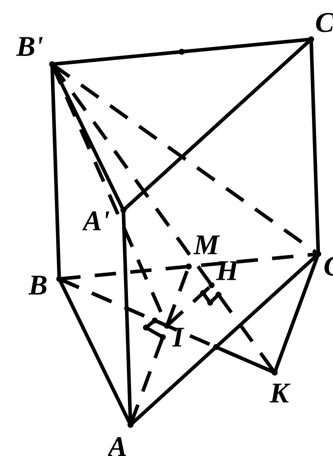
Ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BI^2}$

$= \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2}$.

$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{7}}{7}$. Vậy $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2. Kẻ $BI \perp AM$ thì $(IBB') \perp AM$, kẻ $CK // AM$ thì $CK \perp (IBB')$

Xét phép chiếu vuông góc lên (IBB') thì ta có $B'K$ là hình chiếu của $B'C$ trên (IBB') nên $d(AM, B'C) = d(I, B'K)$.



Hạ $IH \perp B'K, H \in B'K$, ta có

$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Dễ thấy $BK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ và $B'K = \sqrt{BK^2 + BB'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{5} + 2a^2} = a\sqrt{\frac{14}{5}}$.

Ta có $\Delta KHI \sim \Delta KBB' \Rightarrow \frac{IH}{BB'} = \frac{IK}{B'K}$

$\Rightarrow IH = \frac{IK.BB'}{B'K} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{5}}{a\sqrt{14}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

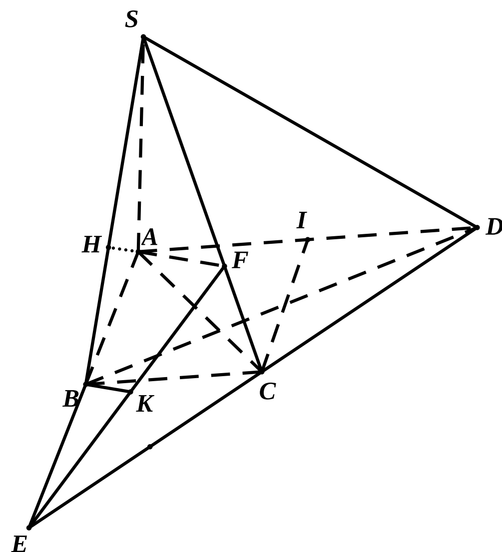
Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2007)

A. $d(H,(SCD))=\frac{a}{3}$ **B.** $d(H,(SCD))=\frac{a}{2}$ **C.** $d(H,(SCD))=a$ **D.** $d(H,(SCD))=\frac{a}{4}$

Bài làm:71. Gọi I là trung điểm của AD, thế thì $IA=ID=IC=\frac{AD}{2}$ nên ΔACD vuông tại C

$\Rightarrow CD\perp AC(1)$



Lại có $SA\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SA\perp CD$ (2). Từ $(1),(2)$ suy ra

$CD\perp(SAC)\Rightarrow CD\perp SC$, hay tam giác SCD vuông tại C.

Gọi d_1,d_2 lần lượt là khoảng cách từ B,H đến (SCD).

Ta có

$\frac{d_2}{d_1}=\frac{SH}{SB}=\frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{2}{3}$

$d_2=\frac{2}{3}d_1$.

Kẻ $AF\perp SC$ thì dễ thấy $AF\perp(SCD)$, kẻ $BK//AF, K\in EF$ thì $d_1=BK$.

Gọi $E=AB\cap CD$.

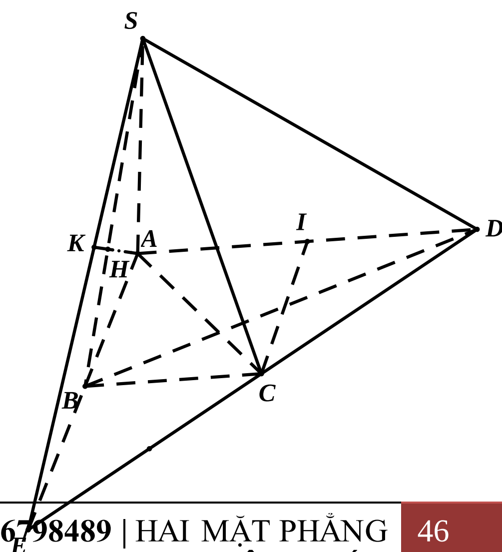
Ta có $\frac{BK}{AF}=\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}\Rightarrow BK=\frac{1}{2}AF$.

Mặt khác,trong tam giác vuông SAC ta có $\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow AF=a$

$\Rightarrow KB=\frac{a}{2}\Rightarrow d_1=\frac{a}{2}\Rightarrow d_2=\frac{2}{3}.\frac{a}{2}=\frac{a}{3}$

Vậy $d(H,(SCD))=d_2=\frac{a}{3}$.

Lưu ý: Có thể tính khoảng cách từ H đến (SCD) theo cách khác như sau:



Gọi $E=AB\cap CD, K=AH\cap SE$

Dễ thấy B là trung điểm của AE và $\frac{SH}{SB}=\frac{2}{3}$ nên H là trọng tâm của tam giác ASE.

Ta có $\frac{d(H,(SCD))}{d(A,(SCD))}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{3}$

Tứ diện $ABES$ có AB, AE, AS đôi một vuông góc nên

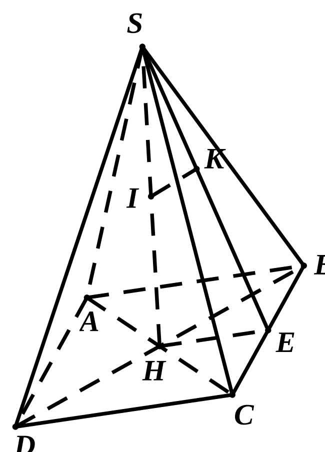
$$\frac{1}{d^2\left(A,(SCD)\right)}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}.$$

$$\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=a\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=\frac{a}{3}.$$

Câu 72. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b. Tính SH.

A. $SH=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}$ **B.** $SH=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}$ **C.** $SH=\dfrac{2ab}{\sqrt{3a^2-16b^2}}$ **D.** $SH=\dfrac{3ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}$

Bài làm: 72. Gọi E là trung điểm của BC, ta có



$$\begin{cases}BC\perp HE\\ BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHE)$$

$\Rightarrow(SHE)\perp(SBC)$. Do đó $IK\perp SE$ thì $IK\perp(SBC)\Rightarrow IK=b$.

Ta có $\Delta SKI\sim\Delta SHE\Rightarrow\dfrac{IK}{HE}=\dfrac{SK}{SH}$

$\Rightarrow SH=\dfrac{HE.SK}{IK}$ $(*)$, mà $HE=\dfrac{a}{2}, IK=b, SK=\sqrt{SI^2-IK^2}=\sqrt{\dfrac{SH^2}{4}-b^2}$ nên

$(*)\Leftrightarrow SH=\dfrac{a}{2b}\sqrt{\dfrac{SH^2}{4}-b^2}\Leftrightarrow SH=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}$.

Vậy $SH=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2-16b^2}}$.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a và $AC=a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, biết $SH\perp(ABCD)$ và $SH=a$. Tính khoảng cách

a) Từ O đến (SCD).

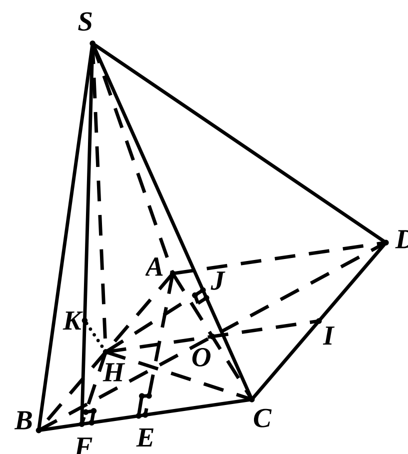
A. $d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{14}$ **B.** $d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$

C. $d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$ **D.** $d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$

b) Từ A đến (SBC).

A. $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{a\sqrt{57}}{19}$ **B.** $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{5}}{19}$

C. $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{7}}{19}$ **D.** $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$



Bài làm:73. a) Gọi $I=HO\cap CD\Rightarrow\frac{d\left(O,(SCD)\right)}{d\left(H,(SCD)\right)}=\frac{OI}{HI}=\frac{1}{2}$

Tam giác ABC đều nên $CH\perp AB$ mà $AB\,//\,CD\Rightarrow CH\perp CD$.

Mặt khác $CD\perp SH$ do đó $CD\perp(SHC)$, kẻ

$HJ\perp SC, J\in SC\Rightarrow HJ\perp(SCD)\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=HJ$.

Ta có $HC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, trong tam giác SHC có $\frac{1}{HJ^2}=\frac{1}{HC^2}+\frac{1}{HS^2}$

$=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}$.

$\Rightarrow HJ=a\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}\Rightarrow d\left(O,(SCD)\right)=\frac{1}{2}d\left(H,(SCD)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{14}$

b) Ta có $B=AB\cap(SBC)$ nên $\frac{d\left(A,(SBC)\right)}{d\left(H,(SBC)\right)}=\frac{BA}{BH}=2$

Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC,BE thì $\begin{cases}AE\perp BC\\ HF\,//\,AE\end{cases}\Rightarrow HF\perp BC$

Vậy $\begin{cases}BC\perp HF\\ BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHF)\Rightarrow(SBC)\perp(SHF)$, do đó kẻ $HK\perp SF$ thì $HK\perp(SBC)$ nên

$d\left(H,(SBC)\right)=HK$.

Ta có $HF=\frac{AE}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HF^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{16}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{19}{3a^2}$

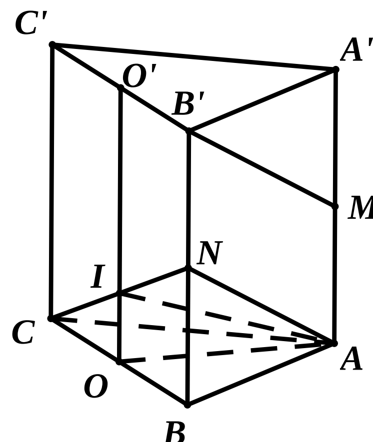
$\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=2d\left(H,(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 74. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

A. $d(B'M,CN)=\frac{3a\sqrt{3}}{4}$ **B.** $d(B'M,CN)=\frac{5a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $d(B'M,CN)=\frac{7a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $d(B'M,CN)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài làm:74.



Gọi O,O' lần lượt là trung điểm của $BC,B'C'$, $I=OO'\cap CN$.

Do $\begin{cases} B'M // AN \\ AN\subset(ACN) \end{cases} \Rightarrow B'M // (CAN)$

$\Rightarrow d(B'M,CN)=d(B'M,(ACN))$

$=d(B',(ACN))$ (1).

Mặt khác N là trung điểm của BB' nên

$d(B',(ACN))=d(B,(CAN))$ (2).

Ta có $CB\cap(CAN)=C\Rightarrow \frac{d(B,(CAN))}{d(O,(CAN))}=\frac{CB}{CO}=2$ (3)

Dễ thấy tứ diện $OACI$ có OA,OC,OI đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(O,(ACN))}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OI^2} \quad (4)$$

Dễ thấy $OC=\frac{a}{2}, OI=\frac{CN}{2}=\frac{a}{4}, OA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\frac{1}{d^2(O,(ACN))}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{16}{a^2}=\frac{64}{3a^2}$$

$\Rightarrow d(O,(ACN))=\frac{a\sqrt{3}}{8}$ (5).

Từ $(1),(2),(3),(4),(5)$ ta có $d(B'M,CN)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SO\perp(ABCD)$, $AC=4, BD=2, SO=\sqrt{3}$. Tính

a) Khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $d(A,(SBC))=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ **B.** $d(A,(SBC))=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$

C. $d(A,(SBC))=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ **D.** $d(A,(SBC))=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $d(AB,SD)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ **B.** $d(AB,SD)=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ **C.** $d(AB,SD)=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ **D.** $d(AB,SD)=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

Bài làm: 75.

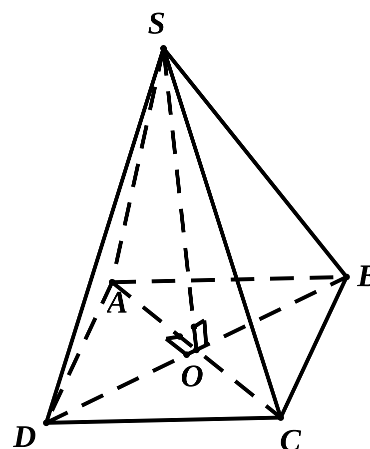
a) Ta có $AO\cap(SBC)=C$ nên $\frac{d(A,(SBC))}{d(O,(SBC))}=\frac{CA}{CO}=2$ (1)

Mặt khác dễ thấy tứ diện $OBCS$ có các cạnh OB,OC,OS

đôi một vuông góc nên $\frac{1}{d^2(O,(SBC))}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OS^2}$

$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{19}{12}\Rightarrow d(O,(SBC))=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

$\Rightarrow d(A,(SBC))=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.



b) Ta có (SCD) là mặt phẳng chứa SD và song song với AB vì vậy $d(AB,SD)=d(AB,(SCD))=d(B,(SCD))$ Tương tự như câu a) ta có $d(B,(SCD))=2d(O,(SCD))$ mà

$d(O,(SCD))=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\Rightarrow d(B,(SCD))=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$, hay $d(AB,SD)=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Câu 76. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a, AD=BC=b, AC=BD=c$.

Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện.

A. $d(AD,BC)=2\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $d(AC,BD)=2\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

B. $d(AD,BC)=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{3}}$, $d(AC,BD)=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{3}}$.

C. $d(AD,BC)=3\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $d(AC,BD)=3\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

D. $d(AD,BC)=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $d(AC,BD)=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

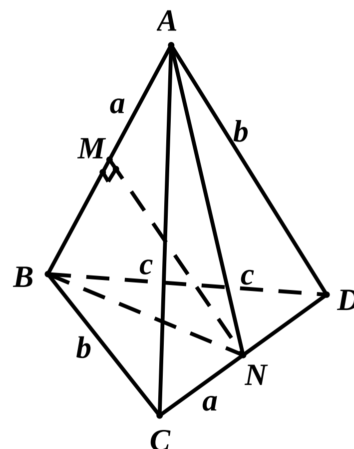
Bài làm: 76.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Xét hai tam giác ACD và BCD có CD chung $AC=BD, AD=BC$ nên $\Delta ACD=\Delta BCD$, mà M là trung điểm của AB nên $MN\perp AB$.

Lí lưaanj tương tự ta cũng có $MN\perp CD$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD, do đó $d(AB,CD)=MN$.



Ta có $AN^2=\dfrac{AC^2+AD^2}{2}-\dfrac{CD^2}{4}=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$MN^2=AN^2-AM^2=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}$

$=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\Rightarrow MN=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$, hay $d(AB,CD)=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

Tính tương tự ta có :

$d(AD,BC)=\sqrt{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $d(AC,BD)=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh $MN\perp BD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

(Trích đề thi ĐH Khối B Năm 2007)

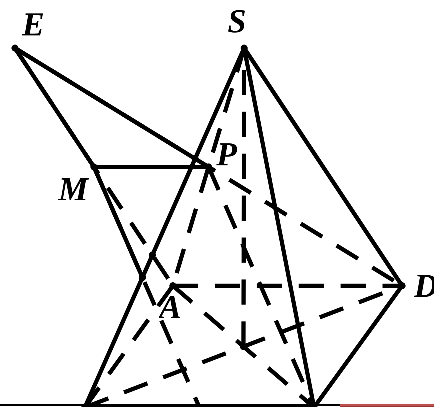
A. $d(MN,AC)=\dfrac{a3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $d(MN,AC)=\dfrac{5a\sqrt{2}}{4}$ **C.** $d(MN,AC)=\dfrac{7a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $d(MN,AC)=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Bài làm: 77. Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MP là đường trung bình của $\Delta EAD \Rightarrow MP // AD \Leftrightarrow MP // BC$.

Do đó $MP //= NC$ nên $MPCN$ là hình bình hành $\Rightarrow MN // CP$.

Mặt khác $ABCD$ là hình chóp đều nên dễ dàng chứng minh được $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp CP$.



Vậy $\begin{cases} MN // CP \\ BD\perp CP \end{cases}\Rightarrow MN\perp BD$.

Ta có (SAC) là mặt phẳng chứa AC và song song với MN nên $d(MN,AC)=d(N,(SAC))$

$=\frac{1}{2}d(B,(SAC))=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $d(MN,AC)=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

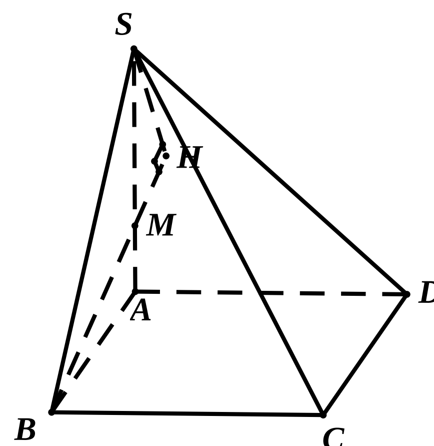
Câu 78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$, cạnh $SA\perp(ABCD)$, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ S đến (BCM).

A. $d(S,(BCM))=2a$ **B.** $d(S,(BCM))=a$ **C.** $d(S,(BCM))=\frac{1}{2}a$ **D.** $d(S,(BCM))=\frac{1}{3}a$

✍**Bài làm:78.** Kẻ $SH\perp BM$. Ta có

$\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp SH$ Lại có

$\begin{cases}SH\perp BM\\SH\perp BC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(MBC)$.



Vậy $d(S,(MBC))=SH$.

Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow(SB,(ABCD))$

$=SBA=60^0\Rightarrow SA=AB\tan60^0=a\sqrt{3}$

$MB=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Dễ thấy $\Delta MHS\sim\Delta MAB$ nên $\frac{MH}{MA}=\frac{MS}{MB}\Rightarrow HM=\frac{MS.MA}{MB}=\frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

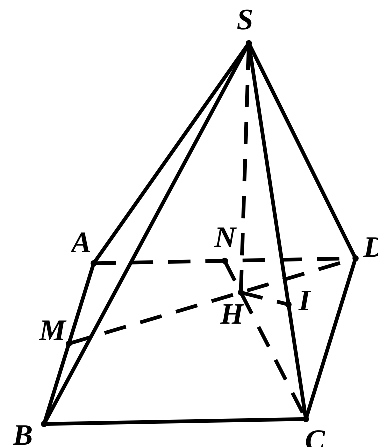
$BH=BM+MH=\frac{2a}{\sqrt{3}}+\frac{a}{\sqrt{3}}=a\sqrt{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$

Vậy $d(S,(BCM))=a$.

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH\perp(ABCD)$ và $SH=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

A. $d(DM,SC)=\frac{a\sqrt{57}}{19}$ **B.** $d(DM,SC)=\frac{2a\sqrt{57}}{9}$ **C.** $d(DM,SC)=\frac{2a\sqrt{7}}{19}$ **D.** $d(DM,SC)=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Bài làm: 79. Ta có $\begin{cases} DM\perp CN \\ DM\perp SH \end{cases}\Rightarrow DM\perp(SCN)$



$\Rightarrow DM\perp SC$. Gọi I là hình chiếu của H trên SC thì HI là đoạn vuông góc chung của SC và DM nên $d(DM,SC)=HI$.

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên $DH.DM=DN.DA\Rightarrow DH=\frac{DN.DA}{DM}$

$=\frac{a^2}{2\sqrt{AM^2+AD^2}}=\frac{a^2}{2\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$.

Ta có $HC^2=DC^2-DH^2=a^2-\frac{a^2}{5}=\frac{4a^2}{5}\Rightarrow HC=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

Tam giác SCH vuông tại H và có đường cao HI nên $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HC^2}$

$=\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{19}{12a^2}\Rightarrow HI=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Vậy $d(DM,SC)=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 80. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a, AC=2a, AA'=2a\sqrt{5}$ và $BAC=120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Tính khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

A. $d(A,(A'BM))=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $d(A,(A'BM))=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $d(A,(A'BM))=\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $d(A,(A'BM))=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Bài làm: 80. Áp dụng định lí cô sin ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=a^2+4a^2-2.2a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)=7a^2$

$\Rightarrow BC=a\sqrt{7}$.

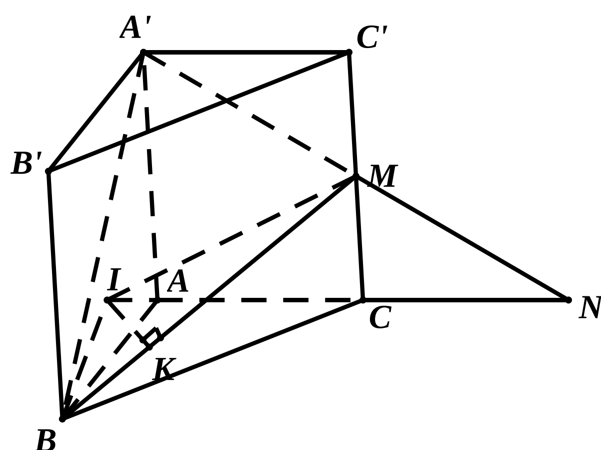
Ta có $BM=\sqrt{BC^2+MC^2}=2a\sqrt{3}, A'B=\sqrt{AB^2+AA'^2}=a\sqrt{21}$

$A'M=\sqrt{A'C^2+C'M^2}=3a$, từ đó ta có $MB^2+MA'^2=21a^2=A'B^2$ nên tam giác $MA'B$ vuông tại M hay $MB\perp MA'$.Kẻ $BI\perp AC$ tại I.

Gọi $N=A'N\cap AC$, ta có $IA\cap(A'BM)=N$ nên $\frac{d(A,(A'BM))}{d(I,(A'BM))}=\frac{NA}{NI}$

Ta có $AN=2AC=4a$, $AI=AB\cos 60^0=\frac{a}{2}$ nên $IN=IA+AN=\frac{a}{2}+4a=\frac{9a}{2}$, do đó

$\frac{d(A,(A'BM))}{d(I,(A'BM))}=\frac{4a}{\frac{9a}{2}}=\frac{8}{9}$.



Dễ thấy $BI\perp(ACC'A')\Rightarrow BI\perp A'M$, vậy

$\begin{cases}A'M\perp BI\\A'M\perp MB\end{cases}\Rightarrow A'M\perp(IMB)$

$(IBM)\perp(A'BM)=BM$ nên kẻ $IK\perp BM$ thì $IK\perp(A'BM)$.

Vậy $d(I,(A'BM))=IK$.

Ta có

$IM=\sqrt{IC^2+CM^2}=\sqrt{\left(\frac{5a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{3a\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1}{IK^2}=\frac{1}{IM^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{45a^2}=\frac{64}{45a^2}\Rightarrow IK=\frac{3a\sqrt{5}}{8}$

Do đó $d(A,(A'BM))=\frac{8}{9}.\frac{3a\sqrt{5}}{8}=\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Lưu ý: Có thể sử dụng $\frac{d(A,(A'BM))}{d(C,(A'BM))}=\frac{NA}{NC}$ dựng như hình vẽ cũng tính được khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG III. VEC TO – QUAN HỆ VUÔNG GÓC.

TẬP 5. 280 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489 hoặc liên lạc

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Page : https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Website : http://tailieutoanhoc.vn/

Email: baovuong7279@gmail.com hoặc tailieutoanhoc7279@gmail.com

MỤC LỤC

TỔNG HỢP LẦN 1. CHƯƠNG III. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Câu 1. Trong không gian,

A. vectơ là một đoạn thẳng.

B. vectơ là một đoạn thẳng đã phân biệt điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

C. vectơ là hình gồm hai điểm, trong đó có một điểm là điểm đầu và một điểm là điểm cuối.

D. vectơ là một đoạn thẳng xác định.

Câu 2. Trong không gian cho vectơ $\overrightarrow{AB}$. Khi đó,

A. giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là AB.

B. giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

C. giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đoạn thẳng *AB*.

D. giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng *AB*.

Câu 3. Trong không gian cho vectơ $\overrightarrow{AB}$. Khi đó,

A. độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là AB.

B. độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

C. độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đoạn thẳng *AB*.

D. độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng *AB*.

Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{B'A'}$. C. $\overrightarrow{D'C'}$. D. $\overrightarrow{BA}$.

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{B'A'}$. C. $\overrightarrow{D'C'}$. D. $\overrightarrow{A'A}$.

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ba vectơ không đồng phẳng là

A. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

B. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{A'A}$.

D. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Câu 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó,

A. $\overrightarrow{D'A}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{D'D}$.

B. $\overrightarrow{D'A}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{D'C}$.

C. $\overrightarrow{D'A}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{D'B}$.

D. $\overrightarrow{D'A}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{D'A}$.

Câu 8. Cho tứ diện *ABCD* có *I*, *J* tương ứng là trung điểm cảu các cạnh *AB* và *CD*. Với điểm *M* bất kì, ta có:

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{IJ}$.

B. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}$.

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{IJ}$.

D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right)$.

Câu 9. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *MNPQ* có *O* và *O′* tương ứng là giao hai đường chéo của mỗi hình đó. Khi đó,

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}=4\overrightarrow{OO'}$.

B. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{OO'}$.

C. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{OO'}$.

D. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}=\vec{0}$.

Câu 10. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó,

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}=4\overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}=3\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}=2\overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}=\vec{0}$.

Câu 11. Cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD'}$. B. $\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD'}-\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD'}$. D. $\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{CD}$.

Câu 12. Trong không gian,

A. ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ phải nằm trong cùng một mặt phẳng.

B. ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ cùng hướng.

C. ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của ba vectơ đó song song với nhau.

D. ba vectơ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của ba vectơ đó cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ là

A. ba vectơ đồng phẳng. B. ba vectơ không đồng phẳng.

C. ba vectơ cùng phương. D. ba vectơ cùng hướng.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AC, BD là hai đường chéo của hình vuông $ABCD$ và $A'C'$, $B'D'$ là hai đường chéo của hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi $AC\cap BD=O$ và $A'B'\cap B'D'=O'$. Các điểm M, N tương ứng trên cạnh BB' và $C'D'$ sao cho $BM=C'N$. Khi đó $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{C'O}$ và $\overrightarrow{MN}$ là

A. ba vectơ đồng phẳng. B. Ba vectơ không đồng phẳng.

C. ba vectơ cùng phương. D. ba vectơ cùng hướng.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AC, BD là hai đường chéo của hình vuông $ABCD$ và $A'C'$, $B'D'$ là hai đường chéo của hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi $AC\cap BD=O$ và $A'B'\cap B'D'=O'$. Các điểm M, N tương ứng trên cạnh BB' và $C'D'$ sao cho $\frac{BM}{BB'}=\frac{C'N}{C'D'}$. Khi đó $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{C'O}$ và $\overrightarrow{MN}$ là

A. ba vectơ đồng phẳng. B. Ba vectơ không đồng phẳng.

C. ba vectơ cùng phương. D. ba vectơ cùng hướng.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh BC và SC. Gọi I là giao điểm của AM với BD. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Khi đó $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GI}$ và $\overrightarrow{MN}$ là

A. ba vectơ đồng phẳng. B. ba vectơ không đồng phẳng.

C. ba vectơ cùng phương. D. ba vectơ cùng hướng.

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh DA và DC. Khi đó $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{MN}$ là

A. ba vectơ đồng phẳng. B. ba vectơ không đồng phẳng.

C. ba vectơ cùng phương. D. ba vectơ không cùng phương.

Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$ (các đỉnh lấy theo thứ tự đó). M là điểm bất kì. Khi đó, ta có thể kết luận gì về mối quan hệ của $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD}$?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$. B. $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$.

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$. D. $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có

A. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SG}$. B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SG}$.

C. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SG}$. D. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=4\overrightarrow{SG}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó, $\overrightarrow{SG}$ cùng phương với

A. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$. B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$. C. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$. D. $-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó, $\overrightarrow{SG}$ cùng hướng với

A. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$. B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$. C. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$. D. $-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC. Gọi I là trung điểm của MN, P là điểm bất kì. Khi đó, $\overrightarrow{PI}$ cùng phương với

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$. B. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$.

C. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PS}$. D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC. Gọi I là trung điểm của MN, P là điểm bất kì. Khi đó, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PS}$ cùng phương với

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$. B. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$. C. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$. D. $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC. Gọi I là trung điểm của MN, P là điểm bất kì. Khi đó, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PS}$ cùng hướng với

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$. B. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$. C. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$. D. $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}$.

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{AC}$ là góc nào dưới đây?

A. $\widehat{B'C'A'}$. B. $\widehat{C'A'B'}$. C. $\widehat{DAC}$. D. $\widehat{DCA}$.

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BB'}$ là góc nào dưới đây?

A. $\widehat{C'AC}$. B. $\widehat{C'AA'}$. C. $\widehat{AC'C}$. D. $\widehat{AC'A'}$.

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{C'D'}$ là góc nào dưới đây?

A. $\widehat{C'AC}$. B. $\widehat{C'AA'}$. C. $\widehat{AC'C}$. D. $\widehat{AC'A'}$.

Câu 28. Cho vectơ $\vec{a}$ khác vectơ không và vectơ $\vec{b}$ bằng vectơ không. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc có số đo bao nhiêu?

A. 0^0. B. 90^0. C. 180^0. D. Tùy ý.

Câu 29. Trong không gian, với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ không, ta luôn có :

A. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$. B. $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}=0$. C. $\vec{a}.\vec{b}\neq\vec{b}.\vec{a}$. D. $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}\neq 0$.

Câu 30. Trong không gian, với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ đều khác vectơ không, ta luôn có :

A. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}=\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$. B. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}+\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)=0$.

C. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}\neq\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$. D. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}+\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)=\vec{0}$.

Câu 31. Trong không gian, với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ không, ta luôn có :

A. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. B. $\vec{a}.\vec{b}>\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. C. $\vec{a}.\vec{b}<\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. D. $\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Câu 32. Trong không gian, với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ không, ta luôn có :

A. $\vec{a}.\vec{b}>0$. B. $\vec{a}.\vec{b}\ge 0$. C. $\vec{a}.\vec{b}<0$. D. $\vec{a}.\vec{b}$ là một số thực.

Câu 33. Trong không gian, với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ không, ta luôn có :

A. $\vec{a}.\vec{a}=-\left|\vec{a}\right|^2$. B. $\vec{a}.\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.

C. $\vec{a}.\vec{a}=0$. D. $\vec{a}.\vec{a}$ không xác định.

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, gọi góc giữa hai đường thẳng AB và CD là α. Ta luôn có :

A. $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$. B. $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

C. $\cos\alpha = -\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

D. $\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}\right|$.

Câu 35. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ.

B. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một góc.

C. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

D. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có thể là số và cũng có thể là vectơ.

Câu 36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, những vectơ bằng nhau là

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{D'D}$.

C. $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{B'D'}$.

D. $\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{CD'}$.

Câu 37. Cho tứ diện $MNPQ$, khi đó đẳng thức **sai** là đẳng thức nào?

A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

B. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \vec{0} = \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NM}$.

D. $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình bình hành. Ta có :

A. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS}$.

B. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QN}$.

D. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NQ}$.

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Ta có :

A. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AD'} = 4a^2$.

B. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AD'} = 2a^2$.

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AD'} = a^2$.

D. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AD'} = 0$.

Câu 40. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Khi đó,

A. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = 4a^2$.

B. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = 2a^2$.

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = a^2$.

D. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = 0$.

Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Khi đó,

A. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 4a^2$.

B. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 2a^2$.

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = a^2$.

D. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0$.

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Khi đó,

A. $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BD} = 6a^2$.

B. $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BD} = a^2\sqrt{6}$.

C. $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = a^2\sqrt{3}$.

D. $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Câu 43. Nếu đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} \neq 0$ thì

A. đường thẳng đó chỉ có một vectơ chỉ phương duy nhất là $\vec{u}$.

B. đường thẳng đó có đúng hai vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và $-\vec{u}$.

C. đường thẳng đó có thêm một vectơ chỉ phương nữa là $k\vec{u}$, với $k \neq 0$.

D. đường thẳng đó có vô số vectơ chỉ phương là $k\vec{u}$, với $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Câu 44. Hãy cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Một đường thẳng d hoàn toàn xác định khi biết hai điểm A, B (phân biệt) thuộc d..

B. Một đường thẳng d hoàn toàn xác định khi biết một vectơ chỉ phương của d.

C. Một đường thẳng d hoàn toàn xác định khi biết một điểm A thuộc d và biết d song song với một đường thẳng a.

D. Một đường thẳng d hoàn toàn xác định khi biết một điểm A thuộc d và biết đường thẳng d vuông góc với một đường thẳng a.

Câu 45. Hãy cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**?

Hai đường thẳng vuông góc nếu

A. góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng là 90^0.

B. góc giữa hai đường thẳng đó là 90^0.

C. tích vô hướng giữa hai vectơ chỉ phương của chúng là bằng 0.

D. góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng là 0^0.

Câu 46. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

Cho các tam giác đều *ABC*, *ABD* và *ABE*, trong đó *ABC* và *ABD* cùng thuộc một mặt phẳng còn *ABE* không thuộc mặt phẳng đó. Gọi *I* là trung điểm của *AB*, ta có :

A. *CE* vuông góc với *DE*. B. *CD* vuông góc với *AB*.
C. *BE* vuông góc với *AE*. D. *AB* vuông góc với *EI*.

Câu 47. Trong không gian,

A. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì giá của hai vectơ đó song song với nhau.
B. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì giá của hai vectơ đó trùng nhau.
C. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì hai vectơ đó cùng phương.
D. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì hai vectơ đó cùng hướng.

Câu 48. Nếu $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ thì

A. góc giữa hai vectơ luông bằng 180^0. B. góc giữa hai vectơ luôn bằng 0^0.
C. hai vectơ đó luôn cùng phương. D. Hai vectơ đó luôn cùng hướng.

Câu 49. $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ khi và chỉ khi thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 1$. B. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -1$. C. $\left|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| = 1$. D. $\left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \left|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| = 1 \end{cases} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{array}\right.$.

Câu 50. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành, hai đường chéo *AC*, *BD* cắt nhau tại *O* và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó,

A. *AC* vuông góc với *BD*. B. *SO* vuông góc với *AC*.
C. *SO* vuông góc với *BD* . D. *SO* vuông góc với (*ABCD*).

Câu 51. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành, hai đường chéo *AC*, *BD* cắt nhau tại *O* và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó,

A. $OA \neq OB = OC = OD$. B. $OA = OB \neq OC = OD$.
C. $OA = OB = OC \neq OD$. D. $OA = OB = OC = OD$.

Câu 52. Cho hai tam giác cân chung đáy là *ABC* và *ABD* và không cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó,

A. *AB* vuông góc với *CD*.
B. *AC* vuông góc với *BD*.
C. *AD* vuông góc với *BC*.
D. các cặp cạnh đối của tứ diện *ABCD* vuông góc với nhau.

Câu 53. Cho hình chóp *S.ABC* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là tam giác vuông đỉnh *B*. Khi đó số mặt của hình chóp đã cho là tam giác vuông bằng bao nhiêu?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 54. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hìn thang vuông có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời đường cao *AB* = *BC*. Khi đó số mặt bên của hình chóp đã cho là tam giác vuông là bao nhiêu?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 55. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó,

A. mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với BD.

B. mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với BD'.

C. mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với $B'D$.

D. mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với BC'.

Câu 56. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó,

A. mặt phẳng $(AB'D')$ vuông góc với $A'C'$.

B. mặt phẳng $(AB'D')$ vuông góc với $A'D$.

C. mặt phẳng $(AB'D')$ vuông góc với $A'B$.

D. mặt phẳng $(AB'D')$ vuông góc với $A'C$.

Câu 57. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình thang cân có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời cạnh bên *AB* = *BC*. Khi đó số mặt bên của hình chóp đã cho là tam giác vuông bằng bao nhiêu?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 58. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình thang cân có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời cạnh bên *AB* = *BC*. Khi đó, trong các tam giác *SAD*, *SAB*, *SBD*, *SCD* số tam giác vuông bằng bao nhiêu?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 59. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình thang cân có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời cạnh bên *AB* = *BC*. Khi đó, góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng đáy là góc nào dưới đây?

A. SCB. B. SCD. C. SCA. D. BCA.

Câu 60. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình thang cân có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời cạnh bên *AB* = *BC*. Khi đó, góc giữa đường thẳng *SD* và mặt phẳng (*SAB*) là góc nào dưới đây?

A. DSA. B. DSB. C. DBA. D. DAB.

Câu 61. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hìn thang vuông có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời đường cao *AB* = *BC*. Khi đó góc giữa *SD* với mặt phẳng (*SAC*) là góc nào dưới đây?

A. DCS. B. DSC. C. DAC. D. DCA.

Câu 62. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hìn thang vuông có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời đường cao *AB* = *BC*. Khi đó góc giữa *BC* với mặt phẳng (*SAC*) là góc nào dưới đây?

A. BSC. B. BCA. C. BAC. D. BCS.

Câu 63. Trong không gian cho điểm O không thuộc đường thẳng *d*. Tập hợp những đường thẳng đi qua *O* và cuông góc với *d* là

A. mặt phẳng (*P*) xác định bởi *O* và *d*.

B. mặt phẳng (*P*) đi qua *O* và (*P*) vông góc với *d*.

C. mặt phẳng (*P*) đi qua *O* và (*P*) song song với *d*.

D. tất cả những đường thẳng đi qua *O*.

Câu 64. Cho hình chóp *S.ABC* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là tam giác vuông tại B. Gọi *AM* là đường cao của tam giác *SAB* (*M* thuộc cạnh *SB*), khi đó *AM* không vuông góc với đoạn thẳng nào dưới đây?

A. *SB*. B. *SC*. C. *BC*. D. *AC*.

Câu 65. Cho hình chóp $A.BCD$ có AB vuông góc với đáy và đáy là tam giác vuông tại C. Gọi BH là đường cao của tam giác ABC (H thuộc cạnh AC). Gọi K thuộc cạnh AD sao cho $\frac{AH}{AC}=\frac{AK}{AD}$. Khi đó KH không vuông góc với đoạn thẳng nào dưới đây?

A. AB. B. AC. C. AD. D. BC.

Câu 66. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

Cho điểm M không thuộc mặt phẳng (P). Qua M kẻ MH vuông góc với (P). Qua M kẻ MI, MK không vuông góc với (P). Khi đó,

A. nếu $MI = MK$ thì $HI = HK$. B. nếu $HI = HK$ thì $MI = MK$.
C. nếu $MI > MK$ thì $HI > HK$. D. nếu $MI < MK$ thì $HI > HK$.

Câu 67. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng là

A. góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với d.
B. góc giữa hai đường thẳng a và b, trong đó a song song với (P) còn b song song với (Q).
C. góc giữa hai giao tuyến (do một mặt phẳng (R) vuông góc với d cắt hai mặt phẳng đã cho).
D. góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, trong đó $\vec{u}$ vuông góc với (P) còn $\vec{v}$ vuông góc với (Q).

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy và đáy là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc nào dưới đây?

A. BSD B. BAD. C. SAB. D. SAD.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy và đáy là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc nào dưới đây?

A. SCA B. SBA. C. ABC. D. BCD.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy và đáy là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là góc nào dưới đây?

A. SCA B. SBC. C. SCD. D. SDA.

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy và đáy là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng không vuông góc với nhau là:

A. (SAB) *và* (SBC). B. (SAB) *và* $(ABCD)$.
C. (SCD) *và* (SAC). D. (SCD) *và* (SAD).

Câu 72. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. khi đó mặt phẳng $(ACC'A')$ không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(BDD'B')$. B. (BDA').
C. $(CB'D')$. D. $(DCB'A')$.

Câu 73. Trong không gian, nếu mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) thì:

A. mỗi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đều vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (Q).

B. mỗi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (Q) đều vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (P).

C. mỗi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) mà vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (Q).

D. mỗi đường thẳng nằm trong mặt phẳng *(P)* mà cắt giao tuyến của *(P)* và *(Q)* đều vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng *(Q)*.

Câu 74. Nếu hai mặt phẳng vuông góc nhau thì:

A. bất kì đường thẳng nào song song với mặt phẳng này phải vuông góc với mặt phẳng kia.

B. bất kì đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này phải song song với mặt phẳng kia.

C. bất kì đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này phải nằm trong mặt phẳng kia.

D. bất kì đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này và không có điểm chung với giao tuyến của hai mặt phẳng, phải song song với mặt phẳng kia.

Câu 75. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì:

A. song song với nhau.

B. trùng nhau.

C. không song song với nhau

D. hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Câu 76. Cho biết khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hình hộp là lăng trụ đứng.

B. Hình hộp chữ nhật là lăng trụ đứng.

C. Hình lập phương là lăng trụ đứng.

D. Hình lăng trụ có một cạnh bên vuông góc với đáy là lăng trụ đứng.

Câu 77. Trong không gian.

A. Hình lăng trụ có đáy là đa giác đều là hình lăng trụ đều.

B. Hình lăng trụ có đáy là hình vuông là hình lăng trụ đều.

C. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi là hình lăng trụ đều .

D. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông là hình lăng trụ đều.

Câu 78. Cho mặt phẳng *(P)*, biết rằng hai cạnh *AB* và *BC* của tam giác *ABC* đều cắt mặt phẳng *(P)* (giao điểm không trùng với đỉnh của tam giác). Khi đó cạnh *CA* sẽ

A. không cắt mp *(P)*.
B. Có cắt mp *(P)*.
C. song song với *(P)*.
D. Nằm trong *(P)*.

Câu 79. Cho hai đường thẳng cắt nhau *a* và *b*, biết rằng đường thẳng *c* cắt cả hai đường thẳng đã cho, thì ba đường thẳng đó sẽ

A. đồng phẳng và đôi một cắt nhau.

B. đồng phẳng và đồng quy.

C. không đồng phẳng.

D. có thể đồng phẳng hoặc không đồng phẳng.

Câu 80. Trong không gian, ba đường thẳng đôi một cắt nhau thì phải

A. đồng phẳng.

B. đồng phẳng và đồng quy.

C. không đồng phẳng.

D. hoặc đồng phẳng hoặc không đồng phẳng thì đồng quy.

Câu 81. Trong không gian

A. nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó đồng phẳng.

B. nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó đồng phẳng.

C. nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song cho trước thì cả ba đường thẳng đó đồng phẳng.

D. nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó đồng phẳng.

Câu 82. Trong không gian

A. nếu một đường thẳng có điểm chung với một cạnh của một tam giác thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng chứa tam giác đó.

B. nếu một đường thẳng có điểm chung với hai cạnh của một tam giác thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng chứa tam giác đó.

C. nếu một đường thẳng có điểm chung voí hai đường thẳng, tương ứng chứa hai cạnh của một tam giác thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng chứa tam giác đó.

D. nếu một đường thẳng có điểm chung voí ba đường thẳng, tương ứng chứa ba cạnh của một tam giác thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng chứa tam giác đó.

Câu 83. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, một đường thẳng c song song với đường thẳng b. Khi đó

A. a và c chéo nhau.

B. a và c cắt nhau.

C. a và c song song.

D. a và c không song song với nhau và không trùng nhau.

Câu 84. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N tương ứng là trung điểm của AB và DC, I là trung điểm MN. Đường thẳng AI cắt mặt phẳng (BCD) tại G. Khi đó G là

A. trực tâm của tam gíac BCD.

B. trọng tâm của tam gíac BCD.

C. tâm đường tròn ngoại tiếp tam gíac BCD.

D. tâm đường tròn nội tiếp tam gíac BCD.

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$, điểm M trên cạnh AC. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với hai cạnh AB và CD sẽ cắt tứ diện theo thiết diện là

A. tứ giác lồi (không có cặp cạnh đối nào song song với nhau).

B. hình thang.

C. hình bình hành.

D. tam giác.

Câu 86. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau. Khi đó:

A. không có đường thẳng nào cắt cả ba đường thẳng đã cho.

B. có duy nhất một đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

C. có đúng hai đường thẳng (phân biệt) cắt cả ba đường thẳng đã cho.

D. có vô số đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

Câu 87. Cho biết khẳng định nào sau đây là sai?

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó:

A. mặt phẳng $(A'BD)$ song song với mặt phẳng $(CB'D')$.

B. $AC'\cap(A'BD)=M.AC'\cap(CB'D')=N$ thì M và N tương ứng là trọng tâm của các tam giác $A'BD$ và $CB'D'$.

C. $AM=MN=NC'$.

D. AC' vuông góc với $(A'BD)$ và $(CB'D')$.

Câu 88. Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng *(P)*, tam giác *ABC* có hình chiếu là tam giác *A′B′C′*. Qua phép chiếu song song đó

A. trực tâm của tam giác *ABC* được biến thành trực tâm của tam giác *A′B′C′*.

B. trọng tâm của tam giác *ABC* được biến thành trọng tâm của tam giác *A′B′C′*.

C. tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác *ABC* được biến thành tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác *A′B′C′*.

D. tâm đường tròn nội tiếp của tam giác *ABC* được biến thành tâm đường tròn nội tiếp của tam giác *A′B′C′*.

Câu 89. Trong không gian cho điểm *O* không thuộc mặt phẳng *(P)*. Tập hợp những đường thẳng đi qua *O* và song song với *(P)* là

A. toàn bộ không gian.

B. một mặt phẳng song song với *(P)*.

C. hai mặt phẳng song song với *(P)*.

D. một mặt phẳng đi qua *O* và song song với *(P)*.

Câu 90. Trong không gian cho ba điểm *A, B, C* không thẳng hàng. Tập hợp các đều ba điểm đó là

A. tập rỗng.

B. tập hợp gồm một điểm *O*, là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

C. mặt phẳng.

D. đường thẳng d đi qua *O*, là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và *d* vuông góc với mặt phẳng *(ABC)*.

Câu 91. Cho điểm *O* không thuộc mặt phẳng *(P)*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *O* trên *(P)*. Tập hợp những điểm *M* nằm trong mặt phẳng *(P)* và cách *O* một khoảng R > OH là

A. tập rỗng.

B. tập hợp gồm một điểm.

C.một đường thẳng

D. một đường tròn có tâm H và bán kính bằng $\sqrt{R^2-OH^2}$.

Câu 92. Tam giác đều *ABC* cạnh a có cạnh *BC* song song với mặt phẳng *(P)*. Mặt phẳng chứa tam giác tạo với mặt phẳng *(P)* góc 30^0. Tam giác *ABC* có hình chiếu vuông góc lên *(P)* là tam giác *A′B′C′* (phương chiếu không song song với cạnh nào của tam giác *ABC*). Khi đó, diện tích của tam giác *A′B′C′* bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; B. $\frac{3a^2}{8}$; C. $\frac{a^2}{2}$; D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$;

Câu 93. Tam giác đều *ABC* cạnh a có cạnh *BC* song song với mặt phẳng *(P)*. Mặt phẳng chứa tam giác tạo với mặt phẳng *(P)* góc 60^0. Tam giác *ABC* có hình chiếu vuông góc lên *(P)* là tam giác *A′B′C′* (phương chiếu không song song với cạnh nào của tam giác *ABC*). Khi đó, đường cao của tam giác *A′B′C* có độ dài là bao nhiêu?

A. $a\sqrt{3}$; B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; D. $\frac{3a}{4}$;

Câu 94. Tam giác *ABC* với cạnh *BC* song song voi mặt phẳng *(P)* có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng *(P)* là tam giác *A′B′C′*. Biết rằng diện tích của tam giác *A′B′C′* bằng một nửa diện tích của tam giác *ABC*. Khi đó, mặt phẳng chứa tam giác *ABC* tạo với mặt phẳng *(P)* một góc có độ lớn là bao nhiêu?

A. 30^0; B. 45^0; C. 60^0; D. 75^0;

Câu 95. Cho biết khẳng định nào sau đây là sai?

Cho tứ diện *ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng nhau (và bằng $a > 0$). Khi đó

A. tất cả các cạnh bên nghiêng đều trên đáy (tức là các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc như nhau).
B. tất cả các mặt bên nghiêng đều trên đáy (tức là các mặt bên cùng tạo với đáy một góc như nhau).
C. tất cả các cạnh bên và mặt bên nghiêng đều trên đáy (tức là các cạnh bên và mặt bên cùng tạo với đáy một góc như nhau).
D. tất cả các mặt của tứ diện đều bằng nhau.

Câu 96. Cho tứ diện *ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng $a > 0$. Khi đó, mặt bên *(ABC)* tạo với mặt đáy *(BCD)* một góc φ thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. B. $\cos\varphi = \frac{1}{3}$.

C. $\cos\varphi = \frac{1}{4}$. D. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 97. Cho tứ diện *ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng $a > 0$. Khi đó, cạnh bên *AB* tạo với mặt đáy *(BCD)* một góc φ thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. B. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 98. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau. Gọi α,β,γ tương ứng là góc tạo bởi mặt phẳng *(OAB), (OBC), (OCA)* với *(ABC)*. Khi đó, ba góc α,β,γ thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$. B. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

C. $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=2$. D. $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma=2$.

Câu 99. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau. *M* là một điểm bất kì thuộc tam giác *ABC* và không nằm trên cạnh nào của tam giác. Gọi α,β,γ tương ứng là góc tạo bởi *OM* với *OA, OB, OC*. Khi đó, ba góc α,β,γ thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$. B. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

C. $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=2$. D. $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma=2$.

Câu 100. Cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'*. M là một điểm bất kì thuộc hình chữ nhật *BB'C'C* và không nằm trên cạnh nào của hình chữ nhật đó. Gọi α,β,γ tương ứng là góc tạo bởi *AM* với *AB, AD, AA'*. Khi đó, ba góc α,β,γ thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. B. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

C. $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=1$. D. $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma=1$.

Câu 101. Cho tứ diện *ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng $a > 0$. Khi đó khoảng các từ đỉnh *A* đến mặt đáy *(BCD)* là bao nhiêu?

A. $h=\frac{a\sqrt{2}}{3}$; B. $h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; C. $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$; D. $h=\frac{a\sqrt{8}}{3}$;

Câu 102. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau. Gọi *a, b, c* tương ứng là độ dài các cạnh *OA, OB, OC*. Gọi *h* là khoảng cách từ *O* đến mặt phẳng *(ABC)* thì *h* có giá trị là bao nhiêu?

A. $h=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. B. $h=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$.

C. $h=\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}}$. D. $h=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Câu 103. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đaý là hình thang vuông có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời đường cao *AB* = *BC* = *a*. Khi đó khoảng cách từ đường thẳng *BC* đến mặt phẳng *(SAD)* là bao nhiêu?

A. $h=a$; B. $h=\dfrac{a}{2}$; C. $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; D. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

Câu 104. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đaý là hình thang vuông có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời đường cao *AB* = *BC* = *a*. Biết $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AD* và *SC* là bao nhiêu?

A. $h=2a$; B. $h=\dfrac{a}{2}$; C. $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; D. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

Câu 105. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đaý là hình thang vuông có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời đường cao *AB* = *BC* = *a*. Biết $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ đỉnh *B* đến đường thẳng *SC* là bao nhiêu?

A. $h=2a$; B. $h=a\sqrt{10}$; C. $h=a\sqrt{5}$; D. $h=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$;

Câu 106. Cho hình lập phương *ABCD.A′B′C′D′* có cạnh là *a* > *0*. Khi đó, khỏang cách giữa hai mặt phẳng *(AB′D′)* và *(C′BD)* là bao nhiêu?

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 107. Cho hình lập phương *ABCD.A′B′C′D′ có* cạnh là *a* > *0*. Khi đó, khỏang cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AB′* và *BC′* là bao nhiêu?

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 108. Cho biết khẳng định nào sau đây là sai?

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ($n\geq 3$). Xét các mệnh đề sau:

(1) Hình chóp có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy.

(2) Hình chóp có các mặt bên nghiêng đều trên đáy.

(3) Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau.

(4) Đáy $A_1A_2...A_n$ là đa giác nội tiếp được và chân đường cao của hình chóp là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy.

Các mệnh đề tương đương là:

A. $(1)\Leftrightarrow(2)$. B. $(1)\Leftrightarrow(3)$.

C. $(1)\Leftrightarrow(4)$. D. $(3)\Leftrightarrow(4)$.

Câu 109. Cho biết khẳng định nào sau đây là sai?

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ($n\geq 3$). Xét các mệnh đề sau:

(1) Hình chóp có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy.

(2) Hình chóp có các mặt bên nghiêng đều trên đáy.

(3) Đáy $A_1A_2...A_n$ là đa giác nội tiếp được và chân đường cao của hình chóp là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy.

(4) Hình chóp có độ dài đường cao của các tam giác mặt bên (đỉnh *S*) bằng nhau.

Các mệnh đề tương đương là:

A. $(1)\Leftrightarrow(2)$.
B. $(1)\Leftrightarrow(3)$.
C. $(1)\Leftrightarrow(4)$.
D. $(3)\Leftrightarrow(4)$.

Câu 110. Cho biết khẳng định nào sau đây là sai?

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *a* và *b* bằng

A. khoảng cách từ một điểm *M* đến mặt phẳng *(P)*, trong đó điểm *M* thuộc đường thẳng *a* còn mặt phẳng *(P)* chứa đường thẳng *b* và song song với *a*.

B. khoảng cách từ một điểm *N* đến mặt phẳng *(P)*, trong đó mặt phẳng *(P)* chứa đường thẳng *b* và song song với *a* còn điểm *N* thuộc mặt phẳng *(Q)* chứa đường thẳng *a* và song song với đường thẳng *b*.

C. độ dài đoạn *OI*, trong đó đường thẳng *OI* vuông góc với hai đường thẳng *a* và *b*, còn *O*, *I* tương ứng thuộc hai đường thẳng chéo nhau đó.

D. độ dài đoạn *OI*, trong đó *O* là giao của đường thẳng *a* với mặt phẳng *(P)* chứa *b* và vuông góc với đường thẳng *a* và điểm *I* thuộc đường thẳng *b*.

Câu 111. Cho hình chóp *S.ABC*. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Gọi *M, N, P* theo thứ tự là trung điểm các cạnh *BC, CA, AB*. Khi đó vectơ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$ cùng phương với vectơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{SG}$.
B. $\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{SP}$.
C. $\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{SP}$.
D. $\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{SP}$.

Câu 112. Cho hình hộp *ABCD.A′B′C′D′*. Gọi *M, N* theo thứ tự thuộc các cạnh *D′D* và *CB* sao cho *D′M* = *CN*. Khi đó ba vec tơ $\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{MN},\overrightarrow{D'C}$

A.đồng phẳng.
B. Không đồng phẳng.
C. bằng nhau.
D. Có tổng bằng vec tơ không.

Câu 113. Cho lăng trụ *ABC.A′B′C′*, gọi *I* là trung điểm của *BC′*. Khi đó *AI* cắt mặt phẳng *A′B′C′* tại *J*, trong đó

A. *J* là giao điểm của *AI* và *A′C′*.
B. *J* là giao điểm của *AI* và *B′C′*.
C. *J* là giao điểm của *AI* và *A′T*, trong đó *T* là trung điểm của *B′C′*.
D. *J* là giao điểm của *AI* và *A′M*, trong đó *M* thuộc *B′C′* và không là trung điểm của *B′C′*.

Câu 114. Cho hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau *d* và *d′*. Trên *d* lấy điểm *A* sao cho mặt phẳng xác định bởi điểm *A* và *d′* không vuông góc với *d*. Trên d′ lấy hai điểm *B* và *C* phân biệt. Gọi *H* là trực tâm của tam giác *ABC*, gọi *a* là đường thẳng đi qua *H* và vuông góc vơí mặt phẳng chứa tam giác *ABC*. Khi đó

A. đường thẳng *a* song song với đường thẳng *d*.
B. đường thẳng *a* cắt với đường thẳng *d*.
C. đường thẳng *a* và đường thẳng *d* chéo nhau.
D. đường thẳng *a* và đường thẳng *d* trùng nhau.

Câu 115. Cho hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau *d* và *d′*. Trên d lấy điểm *A* sao cho mặt phẳng xác định bởi điểm *A* và *d′* không vuông góc với *d*. Trên *d′* lấy hai điểm *B* và *C* phân biệt. Gọi *H* là trực

tâm của tam giác *ABC*, gọi *a* là đường thẳng đi qua *H* và vuông góc vơi mặt phẳng chứa tam giác *ABC*. Khi đó, đường thẳng *a* đi qua một điểm cố định là

A. giao điểm của *a* và *d*.

B. trực tâm của tam giác *OBC*, với *O* là giao điểm của *d* với mặt phẳng *(R)* chứa *d′* và vuông góc với *d*.

C. trọng tâm của tam giác *OBC*, với *O* là giao điểm của *d* với mặt phẳng *(R)* chứa *d′* và vuông góc với *d*.

D. tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác *OBC*, với *O* là giao điểm của *d* với mặt phẳng *(R)* chứa *d′* và vuông góc với *d*.

Câu 116. Cho tứ diện *OABC* có *OA* vuông góc với mặt phẳng *(OBC)*. Gọi *H* là trực tâm của tam giác *ABC*, gọi *d* là đường thẳng đi qua *H* và vuông góc với mặt phẳng *(ABC)*. Gọi *D* là giao điểm của *d* với tia đối của *OA*. Khi đó, *ABCD* là tứ diện

A. không có cặp cạnh đối diện nào vuông góc với nhau.

B. có đúng một cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

C. có đúng hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

D. có ba cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Câu 117. Cho hình lập phương *ABCD.A′B′C′D′*. Gọi *M, N* tương ứng là trung điểm của các cạnh *BB′* và *C′D′*. Khi đó *MN* song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(A'D'DA)$; B. $(A'BD)$; C. (ABC'D'); D. (C'BD);

Câu 118. Cho hình lập phương *ABCD.A′B′C′D′*. Gọi *M, N, P* tương ứng là trung điểm của các cạnh *BB′, C′D′* và *DA*. Khi đó mặt phẳng *(MPN)* song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(A'D'DA)$; B. $(A'BD)$; C. (ABC'D'); D. (C'BD);

Câu 119. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau. Điểm *M* di động trong miền tam giác *ABC* (kể cả biên là các cạnh *AB, BC, CA*). Gọi α,β,γ tương ứng là góc tao bởi *OM* với *OA, OB, OC*. Khi đó, ba góc α,β,γ thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. B. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

C. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3$. D. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=4$.

Câu 120. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau. Điểm M bất kì thuộc tam giác *ABC* (kể cả biên là các cạnh *AB, BC, CA*). Gọi *x, y, z* tương ứng là khoảng cách từ *M* đến các mặt phẳng (*OBC*), (*OCA*), (*OAB*). Gọi $a=OA$, $b=OB$, $c=OC$. Khi đó

A. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. B. $x+y+z=1$.

C. $ax+by+cz=abc$. D. $x^2+y^2+z^2=abc$.

Câu 121. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $a>0$, gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC* và DD'. Khi đó khoảng cách từ *P* đến *MN* là bao nhiêu?

A. $a\frac{3\sqrt{2}}{8}$. B. $a\frac{\sqrt{22}}{4}$. C. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 122. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $a>0$, gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC* và DD'. Khi đó mặt phẳng (MNP) cắt lập phương theo một thiết diện có diện tích là bao nhiêu?

A. $a^2\frac{5\sqrt{17}}{96}$. B. $a^2\frac{3}{4}\sqrt{\frac{17}{32}}$. C. $a^2\frac{\sqrt{11}}{8}$. D. $a^2\frac{1}{8}\sqrt{\frac{17}{2}}$.

Câu 123. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $a>0$, gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC* và DD'. Khi đó mặt phẳng (*MNP*) tạo với đáy (*ABCD*) của hình lập phương một góc ϕ thỏa điều kiện nào dưới đây?

A. $\cos\varphi = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{16}{17}}$. B. $\cos\varphi = 3\frac{\sqrt{11}}{11}$. C. $\cos\varphi = \frac{3}{2\sqrt{17}}$. D. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 124. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là tứ giác lồi, giao điểm của các cặp cạnh đối là $AD \cap BC = E$ và $AB \cap CD = F$. Biết *SE* vuông góc *SF*. Mặt phẳng (*P*) song song với *SE* và *SF* đồng thời cắt các cạnh *SA*, *SB*, *SC*, *SD* tương ứng tại A', B', C', D'. Khi đó,

A. $A'B'C'D'$ là một hình thang. B. $A'B'C'D'$ là một hình bình hành.
C. $A'B'C'D'$ là một hình thoi. D. $A'B'C'D'$ là một hình chữ nhật.

Câu 125. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình thang cân có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời cạnh bên *AB* bằng đáy nhỏ. Biết $BC = a,\ SA = 2a$. Khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (*SCD*) là bao nhiêu?

A. $h = a$. B. $h = 2a\sqrt{3}$. C. $h = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$. D. $h = \frac{2a\sqrt{7}}{3}$.

Câu 126. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình thang cân có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời cạnh bên *AB* bằng đáy nhỏ. Một mặt phẳng (*P*) đi qua *A* và vuông góc với *SD* cắt SB, SC, SD tương ứng tại B', C', D'. Khi đó ta có thể kết luận gì về tứ giác $AB'C'D'$?

A. $AB'C'D'$ là một tứ giác nội tiếp được (không có cặp cạnh đối nào song song).
B. $AB'C'D'$ là một hình chữ nhật.
C. $AB'C'D'$ là một hình thang.
D. $AB'C'D'$ là một hình bình hành.

Câu 127. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là hình thang cân có đáy lớn *AD* gấp đôi đáy nhỏ *BC*, đồng thời cạnh bên *AB* bằng đáy nhỏ. Biết $BC = a,\ SA = 2a$. Khi đó hai mặt phẳng (*SAC*) và mặt phẳng (*SCD*) tạo với nhau một góc có số đo là bao nhiêu?

A. 90^0. B. 60^0. C. 45^0. D. 30^0.

Câu 128. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh *a*. Một mặt phẳng (*P*) đi qua trung điểm *M* của cạnh BB' đồng thời vuông góc với đường thẳng $A'C$, sẽ cắt hình lập phương theo một thiết diện là hình gì?

A. Tam giác đều. B. Tứ giác đều. C. Ngũ giác đều. D. Lục giác đều.

Câu 129. Cho hai đường thẳng cố định *d* và d' cùng vuông góc với mặt phẳng (*P*) cố định. Hai mặt phẳng di động (*Q*) và (*R*), vuông góc với nhau. Biết (*Q*) và (*R*) tương ứng chứa *d* và d'. Gọi *a* là giao tuyến của (*Q*) và (*R*). Gọi *M* là giao điểm của *a* và (*P*). Khi đó ta có thể kết luận gì về điểm *M*?

A. *M* chạy trên một đường thẳng.
B. *M* chạy trên một mặt cong.
C. *M* chạy trên một cung tròn.
D. *M* chạy trên một đường tròn đường kính *AB*, trong đó *A*, *B* tương ứng là giao điểm của các đường thẳng *d* và d' với (*P*).

Câu 130. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

Cho hình chóp *S.ABCD* có $SA = SB = SC = SD$ có đáy *ABCD* là hình bình hành, hai đường chéo *AC*, *BD* cắt nhau tại *O*. Khi đó,

A. *SO* vuông góc với *AB*. B. *SO* vuông góc với *AC*.
C. *SO* vuông góc với *BD*. D. *SO* vuông góc với *SA*.

Câu 131. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* vuông góc với đáy và đáy là tứ giác có hai đường chéo *AC*, *BD* vuông góc với nhau. Gọi *M*, *N* tương ứng là trung điểm của *SB*, *SD*. Khi đó *MN* không vuông góc với đoạn thẳng nào dưới đây?

A. *SA*. B. *AC*. C. *SC*. D. *BC*.

ĐÁP ÁN

1B	2D	3B	4C	5D	6C	7C	8D	9A	10A
11D	12D	13A	14A	15A	16A	17A	18C	19C	20A
21A	22C	23D	24D	25C	26B	27D	28D	29A	30C
31D	32D	33B	34D	35C	36D	37C	38B	39C	40C
41C	42D	43D	44B	45D	46C	47C	48C	49D	50A
51D	52A	53D	54D	55A	56D	57C	58D	59C	60B
61B	62B	63B	64D	65C	66D	67C	68B	69B	70A
71D	72D	73C	74D	75D	76A	77D	78A	79D	80D
81C	82D	83D	84B	85C	86D	87D	88B	89D	90D
91D	92B	93C	94C	95C	96B	97C	98B	99B	100A
101C	102D	103A	104D	105D	106A	107A	108A	109A	110D
111B	112A	113C	114B	115B	116D	117D	118C	119A	120A
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131									

TỔNG HỢP LẦN 2. CHƯƠNG III: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’, M là trung điểm của BB’. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$ **C.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 2. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ **D.** $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$ **B.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$ **C.** $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$ **D.** $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}=\vec{0}$

Câu 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ .Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$ b) $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$ **C.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$ **D.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$

Câu 5. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành ABCD. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}, \overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$ b) $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$ **D.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

Câu 6. * Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành ABB’A’ và BCC’B’. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$ **B.** Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

C. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$ **D.** Ba vecto $\overrightarrow{BD};\overrightarrow{IK};\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

Câu 7. * Cho tứ diện ABCD. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện ABCD khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ ”. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD)

B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC

D. Chưa thể xác định được.

Câu 8. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$ **B.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$ **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$ **D.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$

Câu 9. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$ .Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là tâm hình bình hành ABB’A’ **B.** M là tâm hình bình hành BCC’B’

C. M là trung điểm BB’ **D.** M là trung điểm CC’

BÀI 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

Câu 10. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì a//b

B. Nếu a//b và c ⊥ a thì c ⊥ b.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì a//b

D. Nếu a và b cùng nằm trong mp (α) // c thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c

Câu 11. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, IJ = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 12. Cho tứ diện ABCD có AB = a, BD = 3a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. MN = $\frac{a\sqrt{10}}{2}$ **B.** MN = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** MN = $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **D.** MN = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Câu 13. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Giả sử tam giác AB’C và A’DC’ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và A’D là góc nào sau đây?

A. ∠ BDB’ **B.** ∠ AB’C **C.** ∠ DB’B **D.** ∠ DA’C’

Câu 14. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì AB⊥CD , AC ⊥BD, AD⊥BC. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được AD⊥BC và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được AB⊥CD.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Đúng **B.** Sai từ bước 1 **C.** Sai từ bước 1 **D.** Sai ở bước 3

Câu 15. Cho tứ diện đều ABCD (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 16. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể ***sai***?

A. A’C’⊥BD **B.** BB’⊥BD **C.** A’B⊥DC’ **D.** BC’⊥A’D

Câu 17. Cho tứ diện đều ABCD, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó cos(AB,DM) bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 19. Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 20. Cho tứ diện ABCD có AB = CD. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (giữa (IE, JF) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

BÀI 3: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Câu 21. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Nếu đường thẳng d $\perp(\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α)

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì d $\perp(\alpha)$

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

D. Nếu d $\perp(\alpha)$ và đường thẳng a // (α) thì d ⊥ a

Câu 22. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Câu 23. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Câu 24. Mệnh đề nào sau đây có thể ***sai*** ?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

D. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

Câu 25. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABC) và ΔABC vuông ở B. AH là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. SA ⊥ BC **B.** AH ⊥ BC **C.** AH ⊥ AC **D.** AH ⊥ SC

Câu 26. Trong không gian tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là:

A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. **B.** Đường trung trực của đoạn thẳng AB.

C. Mặt phẳng vuông góc với AB tại A **D.** Đường thẳng qua A và vuông góc với AB

Câu 27. Cho tứ diện ABCD có AB = AC và DB = DC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. AB ⊥ (ABC) **B.** AC ⊥ BD **C.** CD ⊥ (ABD) **D.** BC ⊥ AD

Câu 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết SA = SC và SB = SD. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. SO ⊥ (ABCD) **B.** CD ⊥ (SBD) **C.** AB ⊥ (SAC) **D.** CD⊥ AC

Câu 29. * Cho hình chóp S.ABC có SA= SB = SC và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ SH ⊥ (ABC), H∈(ABC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trọng tâm tam giác ABC **B.** H trùng với trực tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trung điểm của AC **D.** H trùng với trung điểm của BC

Câu 30. Cho hình chóp S.ABC có cạnh SA⊥ (ABC) và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây có thể ***sai*** ?

A. CH ⊥ SA **B.** CH ⊥ SB **C.** CH ⊥ AK **D.** AK ⊥ SB

Câu 31. Cho hình chóp S.ABC có SA= SB = SC. Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. O là trọng tâm tam giác ABC **B.** O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC **C.** O là trực tâm tam giác ABC **D.** O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Câu 32. Cho hình chóp S.ABCD có SA⊥ (ABC) và đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi O là tâm của ABC và I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. BC ⊥ SB **B.** (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD

C. IO ⊥ (ABCD) **D.** Tam giác SCD vuông ở D.

Câu 33. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và SA⊥ (ABCD). Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. (IJK) // (SAC) **B.** BD ⊥ (IJK)

C. Góc giữa SC và BD có số đo 60^0 **D.** BD ⊥ (SAC)

Câu 34. Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Hãy chỉ ra điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D.

A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC **B.** O là trọng tâm tam giác ACD

C. O là trung điểm cạnh BD **D.** O là trung điểm cạnh AD

Câu 35. Cho hình chóp S.ABC có SA⊥ (ABC) và AB ⊥BC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. H là trung điểm cạnh AB **B.** H là trung điểm cạnh AC

C. H là trọng tâm tam giác ABC **D.** H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Câu 36. Cho tứ diện ABCD. Vẽ AH ⊥ (BCD). Biết H là trực tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây không ***sai*** ?

A. AB = CD **B.** AC = BD **C.** AB⊥ CD **D.** CD⊥ BD

Câu 37. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông có tâm O, SA⊥ (ABCD). Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. IO⊥ (ABCD). **B.** (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD

C. BD⊥ SC **D.** SA= SB= SC.

Câu 38. Cho tứ diện ABCD có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Góc giữa AC và (BCD) là góc ACB **B.** Góc giữa AD và (ABC) là góc ADB

C. Góc giữa AC và (ABD) là góc CAB **D.** Góc giữa CD và (ABD) là góc CBD

Câu 39. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và BC = a. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho SA = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo giữa đường thẳng SA và (ABC)

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 40. Cho hình vuông ABCD có tâm O và cạnh bằng 2a. Trên đường thẳng qua O vuông góc với (ABCD) lấy điểm S. Biết góc giữa SA và (ABCD) có số đo bằng 45^0. Tính độ dài SO.

A. SO = $a\sqrt{3}$ **B.** SO= $a\sqrt{2}$ **C.** SO = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** SO= $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 41. Cho hình thoi ABCD có tâm O, AC = 2a. Lấy điểm S không thuộc (ABCD) sao cho SO⊥(ABCD). Biết tanSOB= $\frac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và (ABCD).

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 42. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và SA⊥ (ABCD) . Biết SA = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và (ABCD)

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 43. Cho hình chóp S.ABCD có các cạnh bên bằng nhau SA = SB = SC = SD. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy ABCD. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. HA = HB = HC = HD

B. Tứ giác ABCD là hình bình hành

C. Tứ giác ABCD nội tiếp được trong đường tròn.

D. Các cạnh SA, SB, SC, SD hợp với đáy ABCD những góc bằng nhau.

Câu 44. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều.Tính số đo của góc giữa SA và (ABC)

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 45. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền BC = a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết SB = a. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC)

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

BÀI 4: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Câu 46. Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và đáy ABC vuông ở A. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. (SAB) ⊥ (ABC)

B. (SAB) ⊥ (SAC)

C. Vẽ AH ⊥ BC , H ∈BC ⇒ góc ASH là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc ∠SCB.

Câu 47. Cho tứ diện ABCD có AC = AD và BC = BD. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc ∠AIB. **B.** (BCD) ⊥ (AIB)

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc ∠CBD **D.** (ACD) ⊥ (AIB)

Câu 48. Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và AB ⊥ BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. Góc SBA **B.** Góc SCA **C.** Góc SCB **D.** Góc SIA (I là trung điểm BC)

Câu 49. * Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và SA ⊥ (ABCD). Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là góc ∠ABS.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) là góc ∠SOA (O là tâm hình vuông ABCD)

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD) là góc ∠SDA.

D. (SAC) ⊥(SBD)

Câu 50. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết SO ⊥ (ABCD), SO = $a\sqrt{3}$ và đường tròn ngoại tiếp ABCD có bán kính bằng a. Tính góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy?

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 51. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O và khoảng cách từ A đến BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết SA ⊥ (ABCD) và SA = 2a. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (SBD). Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. (SAB) ⊥(SAD) **B.** (SAC) ⊥(ABCD) **C.** tanα = $\sqrt{5}$ **D.** α = ∠ SOA.

Câu 52. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi, AC = 2a. Các cạnh bên AA', BB'… vuông góc với đáy và AA' = a. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (AA'C'C) và (BB'D'D) có số đo bằng 60^0.

C. Hai mặt bên (AA'C) và (BB'D) vuông góc với hai đáy.

D. Hai hai mặt bên AA'B'B và AA'D'D bằng nhau.

Câu 53. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D'. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây *không đúng*?

A. (AA'B'B)⊥(BB'C'C) **B.** (AA'H)⊥(A'B'C')

C. BB'C'C là hình chữ nhật. **D.** (BB'C'C)⊥(AA'H)

Câu 54. Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và đáy ABC là tam giác cân ở A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H ∈ SB **B.** H trùng với trọng tâm tam giác SBC

C. H ∈ SC **D.** H ∈ SI (I là trung điểm của BC)

Câu 55. Cho hình chóp S.ABC có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. SC ⊥ (ABC) **B.** Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) thì A' ∈ SB

C. (SAC) ⊥ (ABC) **D.** BK là đường cao của tam giác ABC thì BK ⊥ (SAC).

Câu 56. Cho hình chóp S.ABC có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH (H∈ BC). Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. SC ⊥ (ABC) **B.** (SAH) ⊥ (SBC)

C. O∈ SC **D.** Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc SBA.

Câu 57. * Cho tứ diện ABCD có hai mặt bên ACD và BCD là hai tam giác cân có đáy CD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD). Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. AB nằm trên mặt phẳng trung trực của CD

B. H∈AM (M là trung điểm CD)

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc ADB.

D. (ABH) ⊥ (ACD).

Câu 58. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A. H là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Các mặt bên của ABC.A'B'C' là các hình chữ nhật bằng nhau.

B. (AA'H) là mặt phẳng trung trực của BC

C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên (A'BC) thì O ∈A'H

D. Hai mặt phẳng (AA'B'B) và (AA'C'C) vuông góc nhau.

Câu 59. Hình hộp ABCD.A'B'C'D' trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây?

A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

B. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy

C. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.

D. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông

Câu 60. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Khẳng định nào sau đây *không đúng*?

A. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

B. Hai mặt ACC'A' và BDD'B' vuông góc nhau

C. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp

D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng qui tại trung điểm của mỗi đường.

Câu 61. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Hai mặt ACC'A' và BDD'B' vuông góc nhau

B. Bốn đường chéo AC', A'C, BD', B'D bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$

C. Hai mặt ACC'A' và BDD'B'là hai hình vuông bằng nhau

D. AC ⊥ BD'

Câu 62. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = a, AD = 2a. Gọi α là góc giữa đường chéo A'C và đáy ABCD. Tính α

A. $\alpha \approx 20^0 45'$ **B.** $\alpha \approx 24^0 5'$ **C.** $\alpha \approx 30^0 18'$ **D.** $\alpha \approx 25^0 48'$

Câu 63. Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (ABC') có số đo bằng 60^0. Cạnh bên của hình lăng trụ bằng:

A. 3a **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** 2a **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 64. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có AB = AA' = a, BC = 2a, CA = $a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Đáy ABC là tam giác vuông.

B. Hai mặt AA'B'B và BB'C' vuông góc nhau

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A"BC) có số đo bằng 45^0

D. AC' = $2a\sqrt{2}$

Câu 65. Cho hình lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F' có cạnh bên bằng a và ADD'A' là hình vuông. Cạnh đáy của lăng trụ bằng:

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 66. Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có ACC'A' là hình vuông, cạnh bằng a. Cạnh đáy của hình lăng trụ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $a\sqrt{3}$

Câu 67. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng 2a. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC và A'B'C'. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về AA'G'G?

A. AA'G'G là hình chữ nhật có hai kích thước là 2a và 3a.

B. AA'G'G là hình vuông có cạnh bằng 2a.

C. AA'G'G là hình chữ nhật có diện tích bằng $6a^2$

D. AA'G'G là hình vuông có diện tích bằng $8a^2$

Câu 68. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A. Tam giác AB'C là tam giác đều.

B. Nếu α là góc giữa AC’ thì cosα = $\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. ACC’A’ là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$

D. Hai mặt AA’C’C và BB’D’D ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Câu 69. Cho hình chóp S.ABC có đường cao SH. Xét các mệnh đề sau:

I) SA = SB = SC

II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

III) Tam giác ABC là tam giác đều.

IV) H là trực tâm tam giác ABC.

Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận S.ABC là hình chóp đều?

A. (I) và (II) **B.** (II) và (III) **C.** (III) và (IV) **D.** (IV) và (I)

Câu 70. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Tính số đo góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 71. Cho hình chóp tú giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 72. Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 73. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính độ dài đường cao SH.

A. SH = $\frac{a}{2}$ **B.** SH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** SH = $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** SH = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 74. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 75. Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho OA = OB = OC = a. Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A. O.ABC là hinhd chóp đều.

B. Tam giác ABC có diện tích S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C. Tam giác ABC có chu vi 2p = $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$

D. Ba mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA)vuông góc với nhau từng đôi một.

Câu 76. Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng a và $\hat{A} = 60^0$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O (O là tâm của ABCD), lấy điểm S sao cho tam giác SAC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. S.ABCD là hình chóp đều**B.** Hình chóp S.ABCD có các mặt bên là các tam giác cân.

C. SO = $\frac{3a}{2}$ **D.** SA và SB hợp với mặt phẳng (ABCD) những góc bằng nhau.

Câu 77. Cho hình chóp cụt đều ABC.A'B'C' với đáy lớn ABC có cạnh bằng a. Đáy nhỏ A'B'C' có cạnh bằng $\frac{a}{2}$, chiều cao OO' = $\frac{a}{2}$. Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Ba đường cao AA', BB', CC' đồng qui tại S.

B. AA'= BB'= CC' = $\frac{a}{2}$

C. Góc giữa cạnh bên mặt đáy là góc SIO (I là trung điểm BC)

D. Đáy lớn ABC có diện tích gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ A'B'C'.

Câu 78. Cho hình chóp cụt tứ giác đều ABCD.A'B'C'D'cạnh của đáy nhỏ ABCD bằng $\frac{a}{3}$ và cạnh của đáy lớn A'B'C'D'bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính chiều cao OO' của hình chóp cụt đã cho.

A. OO'= $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** OO' = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** OO' = $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ **D.** OO' = $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$

BÀI 5: KHOẢNG CÁCH

Câu 79. Cho tứ diện SABC trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và SA = 3a, SB = a, SC=2a. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{6}$

Câu 80. Cho hình chóp A.BCD có cạnh AC ⊥ (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết AC = a$\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng:

A. a $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **B.** a $\sqrt{\frac{6}{11}}$ **C.** a $\sqrt{\frac{7}{5}}$ **D.** a $\sqrt{\frac{4}{7}}$

Câu 81. Cho hình chóp A.BCD có cạnh AC ⊥ (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết AC = a$\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$

Câu 82. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥(ABCD) đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^0$. Biết SA= 2a. Tính khỏang cách từ A đến SC

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$

Câu 83. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥(ABCD), SA= 2a, ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của ABCD, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 84. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. a$\sqrt{2}$ cotα **B.** a$\sqrt{2}$ tan **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ cosα **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ sinα

Câu 85. Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết SA = 3a, AB=a$\sqrt{3}$, BC = a$\sqrt{6}$. Khỏang cách từ B đến SC bằng:

A. a$\sqrt{2}$ **B.** 2a **C.** 2a$\sqrt{3}$ **D.** a$\sqrt{3}$

Câu 86. Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết SA = a$\sqrt{3}$, AB=a$\sqrt{3}$. Khỏang cách từ A đến (SBC) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 87. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD), đáy ABCD là hình chữ nhật. Biết AD = 2a, SA = a. Khỏang cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{3a}{\sqrt{7}}$

Câu 88. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng 2a và chiều cao bằng a$\sqrt{3}$. Tính khaỏng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** a$\sqrt{\frac{3}{10}}$ **D.** a$\sqrt{\frac{2}{5}}$

Câu 89. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng a$\sqrt{2}$. Tính khỏang cách từ tâm O của đáy ABCD đến một mặt bên:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{}}{2}$

Câu 90. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông có chiều cao AB = a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Tính khỏang cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Câu 91. Cho hình thang vuông ABCD vuông ở A và D, AD = 2a. Trên đường thẳng vuông góc tại D với (ABCD) lấy điểm S với SD = a$\sqrt{2}$. Tính khỏang cách giữa đường thẳng DC và (SAB).

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** a$\sqrt{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 92. Cho hình chóp O.ABC có đường cao OH = $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khỏang cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng:.

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 93. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AB và CD.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 94. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD), đáy ABCD là hình chữ nhật với AC = a$\sqrt{5}$ và BC=a$\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{2a}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** a$\sqrt{3}$

Câu 95. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 96. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1 (đvd). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

Câu 97. Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, A'D'. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a}{4}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 98. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng 60^0, đáy ABC là tam giác đều và A' cách đều A, B, C. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2a}{3}$

Câu 99. Cho tứ diện đều *ABCD* có cạnh bằng *a*. Khoảng cách từ *A* đến (*BCD*) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 100. Cho tứ diện đều *ABCD* có cạnh bằng *a*. Khoảng cách giữa hai cạnh đối *AB* và *CD* bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

TỔNG HỢP LẦN 3. CHƯƠNG 3. VECTO - QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Câu 1. Cho 6 điểm phân biệt trong không gian A, B, C, D, M, N. Giả thiết nào dưới đây suy ra được ba vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng?

A. Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ABC)

C. Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau

D. Có ba số m, n, p thuộc R, sao cho $m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D trong không gian và điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Bốn ddierm A, B, C, D đồng phẳng

B. Hai đoạn thẳng AB và CD có trung điểm trùng nhau

C. Hai véc tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau

D. Tứ giác ABCD là hình bình hành

Câu 3. Cho tứ giác SABC với G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$ B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Câu 4. Cho ba đường thẳng a, b, c trong không gian. Ta có:

A. a và b cùng vuông góc với c thì a//b

B. $a\perp b$ và $b\perp c$ thì $a\perp c$

C. $a \perp b$ và b//c thì $a \perp c$

D. Cả ba câu trên đều đúng

Câu 5. Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và mặt phẳng (P) và a vuông góc với (P). Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $b//(P)$ thì $b \perp a$

B. $b \perp a$ thì $b//(P)$

C. $b \perp (P)$ thì b//a

D. b//a thì $b \perp (P)$

Câu 6. Cho ba đường thẳng a, b, c phân biệt, trong đó a, b nằm trong mặt phẳng (P) và c không nằm trong (P). Mệnh đề nào sau đây sai?

A. c song song với a hoặc b thì c song song với (P)

B. c vuông góc với (P) thì c vuông góc với a và b

C. c cùng vuông góc với a và b thì c vuông với với (P)

D. c vuông góc với a và b , c không vuông góc với (P) thì a//b

Câu 7. Cho ba mặt phẳng phân biệt (P), (Q), và (R) trong đó (P) cắt (Q) theo giao tuyến **D.** Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $(P) \perp (Q)$ và $(Q) \perp (R)$ thì $(P) \perp (R)$

B. $(P) \perp (Q)$ và $(Q) \perp (R)$ thì $(P)//(R)$

C. $(P) \perp (R)$ và $(Q) \perp (R)$ thì $d \perp (R)$

D. Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 8. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ và hai dường thẳng d và d′ sao cho $d \subset (P)$, $d' \subset (Q)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $d \perp \Delta \Rightarrow d \perp d'$

B. $d \perp d' \Rightarrow d \perp \Delta$

C. d cắt d′ $\Rightarrow d$ cắt Δ

D. d// d′ $\Rightarrow d//\Delta$

Câu 9. Cho hai đường thẳng d và Δ không nằm trong mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $d \perp \Delta$ và $(P) \perp \Delta \Rightarrow d//(P)$

B. $\Delta//(P)$ và $d \perp (P) \Rightarrow d \perp \Delta$

C. $\Delta \perp (P)$ và $d//\Delta \Rightarrow d \perp (P)$

D. $\Delta//(P)$ và $d \perp \Delta \Rightarrow d \perp (P)$

Câu 10. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau là hình hộp chữ nhật.

B. Hình hộp đứng có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình hộp chữ nhật.

C. Hình hộp có ba mặt cùng qua một đỉnh là ba hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật

D. Hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Câu 11. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Qua đường thẳng a , có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng b cho trước

B. Qua đường thẳng a, có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước

C. Qua điểm A, có duy nhất một mặt phẳng phẳng vuông góc với đường thẳng b cho trước

D. Qua điểm A, có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) cho trướ**C.**

Câu 12. Hình chóp SABC có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của điểm A lên SB và S**C.** Mệnh đề nào sau đây sai?

A. d[A,(SBC)] = AH **B.** d[A,(SBC)] = AK **C.** d[C,(SAB)] = BC **D.** d[S,(ABC)] = SA

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A và tam giác ADC vuông tại D nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau và AB=C**D.** Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và B**C.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. IB $\perp$ I**C.** **B.** IK $\perp$ A**D.** **C.** IK $\perp$ B**C.** **D.** AB $\perp$ C**D.**

Câu 14. Cho tam giác ABC và hai điểm M,N nằm trong mặt phẳng (ABC) với MA=MB=MC và NA= NB= N**C.** Đường thẳng MN cắt (ABC) tại H.

Xét bốn mệnh đề sau đây:

(I) AB $\perp$ MN.

(II) AB $\perp$ M**C.**

(III) H là trực tâm tam giác ABC

(IV) H là tâm đường tròn (ABC)

Kết luận nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) và (III) đúng **B.** Chỉ (II) và (III) đúng **C.** Chỉ (IV) đúng **D.** Chỉ (I) và (IV) đúng

Câu 15. Cho tứ diện ABCD với AC= AD và BC = B**D.** Hạ AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của CD và A**B.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. AB=CD **B.** AB $\perp$ CD

C. IJ vuông góc với AB và CD **D.** H là trực tâm tam giác BC**D.**

Câu 16. Cho ba vec tơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ đôi một vuông góc với nhau và cho $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$ và $\vec{b}=m\vec{i}+\vec{k}$ với giá trị nào của m thì $\vec{a}\perp\vec{b}$?

A. m=0 **B.** m=3 **C.** m= -3 **D.** m=4

Câu 17. Cho hình lập phương ABCD A'B'C'D'. Gọi O là tâm hình vuông ABCD và M,N,H,K lần lượt là trung điểm của AA', DD',BC,C**D.** Vec tơ nào sau đây đồng phẳng với các

vec tơ $\overrightarrow{BA'}$ và $\overrightarrow{CB'}$?

A. $\overrightarrow{OM}$ **B.** $\overrightarrow{OB'}$ **C.** $\overrightarrow{MN}$ **D.** $\overrightarrow{HK}$

Câu 18. Cho hình lập phương ABCD A'B'C'D' và K là trung điểm của C**D.**

Phân tích vec tơ $\overrightarrow{A'K}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA'}$. Phân tích nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{A'K}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{A'K}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

C. $\overrightarrow{A'K}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{A'K}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 19. ABC**D.**A'B'C'D'.Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và A'D'. Trong số 6 đường thẳng AB, AC',AD',BD',B'D và MN có bao nhiêu đường thẳng chéo với A'C?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 20. Cho hình lập phương ABC**D.**A'B'C'D'. Trong số 5 đường thẳngAC',AB',BD,C'D,BC',
Có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với A'C?

A. 1 **B.**2 **C.** 3 **C.** 4

Câu 21. Cho ba vec tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ có độ dài bằng 1 và vuông góc với nhau từng đôi một và $\vec{x}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ trong số 5 vec tơ sau đây, có bao nhiêu vec tơ vuông góc với vec tơ $\vec{x}$

$\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{k}$

$\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{d}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.**5.

Câu 22. Trong không gian cho đoạn thẳng AB cố định và một điểm M di động thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2$
Tập hợp các điểm M là :

A. Một đường tròn cố định có bán kính bằng AB

B. Một đường thẳng cố định vuông góc với AB tại B

C. Một mặt phẳng cố định vuông góc với AB tại A

D. Một mặt phẳng cố định vuông góc với AB tại B

Câu 23. Cho hình chóp ngũ giác đều S.ABCDE. Góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo lớn nhất là

A. 36^O **B.** 54^O **C.** 72^O **D.** 90^O

Câu 24. Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF, cạnh **A.** Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy với SO = **A.** Góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo nhỏ nhất là :

A. 30^O **B.** 45^O **C.** 60^O **D.** 90^O

Câu 25. Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (P), đoạn vuông góc SH=1 và các đoạn xiên SA=2, SB=3,SC=4. Gọi α,β,γ lần lượt là góc tạo bởi SA,SB,SC với mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\alpha < 45^0$ **B.** $\beta > 45^0$ **C.** $\beta < \gamma$ **D.** $\gamma > 60^0$

Câu 26. Cho hình chóp tứ diện đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng **A.** Gọi O là giao điểm của AC và B**D.** Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng 90^O

B. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SCD);

C. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) lớn hơn góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SCD);

D.Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng tích của $\sqrt{2}$ với góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SCD).

Câu 27. Cho các mệnh đề sau:

(I) Hình chóp có đáy là tứ diện đều, các mặt bên là bốn tam giác cân chung đỉnh là hình chóp đều;

(II) Hình chóp có bốn cạnh bên bằng nhau và bốn cạnh đáy bằng nhau là hình chóp tứ giác đều;

(III) Hình chóp có các mặt bên là bốn tam giác cân chung đỉnh bằng nhau là hình chóp tứ giác đều.

Trong các phát biểu sau câu nào đúng ?

A. Chỉ (I) và (II) đúng **B.** Chỉ (I) và (III) đúng

C. Chỉ (II) và (III) đúng **A.** Cả (I) và (II) và (III) đúng

Câu 28. Hình chóp S.ABC có hai mặt ABC và SBC là hai tam giác cân chung đáy B**C.** Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và S**A.** Thế thì ta có :

A. SA$\perp$ (JBC)

B. BC$\perp$ (SAI)

C. IJ là đoạn vuông góc chung của SA và BC

D. Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 29. Cho hình lăng trụ tam giác đều AB**C.**A′B′C′ có cạnh đáy bằng a và AA′ = **A.** Khoảng cách giữa AB′ và CC′ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 30. Cho hình lập phương ABC**D.**A′B′C′D′ có cạnh bằng **A.** Gọi O′ là tâm hình vuông A′B′C′D′ và α là góc giữa hai mặt phẳng (O′AB) và (ABCD) góc α thỏa hệ thức nào sau đây?

A. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ **B.** $\tan\ \alpha = 2$ **C.**$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ **D.**$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

Câu 31. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hình chóp có bốn cạnh bên bằng nhau và có đáy là hình bình hành là hình chóp tứ giác đều

B. Hình chóp có bốn cạnh bên bằng nhau và đáy có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình chóp tứ giác đều.

C. Hình chóp có bốn cạnh bên bằng nhau và có đáy là hình chữ nhật là hình chóp tứ giác đều.

D. Hình chóp có bốn cạnh bên bằng nhau và đáy là hình thoi là hình chóp tứ giác đều

Câu 32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, bốn cạnh bên đều bằng 3a và AB=a, BC=a $\sqrt{3}$. Khoảng cách từ S đến (ABCD) là :

A. $2a\sqrt{3}$ **B.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $2a\sqrt{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Giả thiết sau đây chung cho hai câu 33 và 34.

Cho hình chóp S.ABC có SB = SC = a, AB = AC = 2a, SA = a $\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của BC và đặt BC= 2x (x>0).

Câu 33. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. SA vuông góc với mặt phẳng (SBC)

B. BC vuông góc với mặt phẳng (SAI)

C. SI vuông góc với mặt phẳng (ABC)

D. SI vuông góc với SA và BC

Câu 34. Góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 45^0 khi giá trị của x là :

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $a\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **D.** $\dfrac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Giả thiết sau đây chung cho bốn câu 35,36,37,38.

Cho hai tam giác ABD và CBD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau và AB=AD=CB=CD=a, BD = 2x. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BD và A**C.**

Câu 35. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM \perp CM$ **B.** $BN \perp DN$

C. $BD \perp (MAC)$ **D.** $AC \perp (NBD)$

Câu 36. Mặt phẳng (ACB) vuông góc với mặt phẳng (ACD) khi có thêm giả thiết nào sau đây?

A. MN là đoạn vuông góc chung của AC và B**D.**

B. MN= $\dfrac{AC}{2}$

C.MN= $\dfrac{BD}{2}$

D. MN= $\dfrac{BD}{\sqrt{2}}$

Câu 37. Độ dài đoạn MN bằng:

A. $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}$ **B.** $\sqrt{2(a^2-x^2)}$

C. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2-x^2)}$ **C.** $2\sqrt{(a^2-x^2)}$

Câu 38. Khi mặt phẳng (ACB) vuông góc với mặt phẳng (ACD) thì giá trị của x là:

A. . a$\sqrt{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Giả thiết sau đây dùng cho các câu 39,40,41,42.

Cho tứ diện đều ABCD cạnh **A.** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BC**D.**

Câu 39. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) là:

A. a$\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{3a}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 40. Khoảng cách giữa AD và BC là :

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 41. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{9}$

Câu 42. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Giả thiết sau đây dùng cho các câu 43,44,45

Cho lăng trụ tứ giác đều ABC**D.**A'B'C'D' có các cạnh đáy bằng a, AA' =2a và điểm M thuộc đoạn CD' thỏa mãn MC=2MD'. Điểm N là tâm hình chữ nhật AA'D'**D.** Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA'}$.

Câu 43. Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AN}$ theo các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta được:

A. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{AN}=\vec{b}+\vec{c}$

C. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{AN}=\vec{b}-\vec{c}$

Câu 44. Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta được:

A. $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$

A. $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

Câu 45. Tính độ dài đoạn MN ta được:

A. MN = $\frac{a\sqrt{2}}{9}$ **B.** MN = $\frac{a\sqrt{15}}{9}$

C. MN = $\frac{a\sqrt{17}}{36}$ **D.**MN = $\frac{a\sqrt{14}}{36}$

ĐÁP ÁN

1C	2D	3C	4C	5B	6C	7C	8B	9D	10B

11C	12B	13A	14D	15B	16A	17D	18A	19A	20D
21B	22D	23D	24B	26A	26B	27D	28B	29D	30B
31D	32C	33C	34D	35B	36C	37C	38C	39C	40B
41D	42B	43C	44D	45C					